UNIVERSIDADE PRESBITERIANA MACKENZIE

F.C.I. - Faculdade de Computação e informática

Curso de Matemática

BRIAN LEE MAYER

INTEGRANDO ALGUNS CONTEÚDOS DO ENSINO MÉDIO COM EQUAÇÕES DIFERENÇA

São Paulo

2013

BRIAN LEE MAYER

Integrando alguns conteúdos do ensino médio com Equações diferença

Trabalho de conclusão de curso a ser apresentado à F.C.I. – Faculdade de Computação e Informática da Universidade Presbiteriana Mackenzie como requisito para obtenção de título de licenciado em Matemática.

ORIENTADORA: Prof.ª Vera Lucia Antonio de Azevedo

São Paulo

2013

BRIAN LEE MAYER

INTEGRANDO ALGUNS CONTEÚDOS DO ENSINO MÉDIO COM EQUAÇÕES DIFERENÇA

Trabalho de conclusão de curso a ser apresentado à F.C.I. – Faculdade de Computação e Informática da Universidade Presbiteriana Mackenzie como requisito para obtenção de título de licenciado em Matemática.

Aprovado em:

BANCA EXAMINADORA

Profª. Vera Lucia Antonio Azevedo - Orientadora

Universidade Presbiteriana Mackenzie

Profª. Eriko

Universidade Presbiteriana Mackenzie

Prof. Ariovaldo José de Almeida

Universidade Presbiteriana Mackenzie

AGRADECIMENTOS

A Deus, fonte de todo conhecimento e criador do universo.

À prof.ª. Vera Lúcia Antônio de Azevedo, que me orientou continuamente e com muito profissionalismo durante meu curso na Universidade.

À banca, que me auxiliou, e principal responsável pelo meu desenvolvimento durante todo o curso e me avaliarão mais uma vez.

À minha mãe, a pessoa que por ter me dado a vida, que fez todo o meu percurso possível e culminar no presente momento.

À minha família, por todo esforço que fizeram para me dar amor e educação, pela participação especial durante todos os segundos.

À minha namorada, que participou emotivamente durante a criação deste trabalho.

Aos meus colegas da universidade, que sempre me apoiaram, me ouviram, e me deram apoio e conhecimento quando precisei.

Se pretendermos fazer um bolo desde o início precisamos primeiro inventar o universo. (Carl Sagan)

RESUMO

Esta pesquisa tem com objetivo solucionar um problema muito presente em nossa educação: a fragmentação da ementa escolar e a pouca ligação que esta possui com a sociedade, e a realidade dos educandos. As equações diferença, como as progressões estão de várias formas em nossa vida, seu estudo pode ser encontrado em várias situações como aplicações financeiras, crescimento de bactérias e animais, entre outras, isso mostra a importância das equações diferença em nosso cotidiano. Podendo ser empregadas para generalizar o estudo das progressões aritmética e geométrica, permitem um estudo mais aprofundado e consolidado dos fundamentos matemáticos, abordam de uma maneira mais simples para alunos do ensino médio, conteúdos que são muitas vezes obscuros e complexos, para que eles aprendam Matemática de uma forma mais sólida e integrada, ganhando confiança e autonomia.

Palavras-chave: Equação diferença, generalização, indução, progressões, ensino.

ABSTRACT

This research have the objective to solve a problem very much present in our education: the fragmentation of the school menu and that this has little connection with the society, and the reality of the students. The difference equations as the progressions are several ways in our lives, their study can be found in various situations such as financial investments, growth of bacteria and animals, among other things, it shows the importance of difference equations in our daily lives. They can be used to generalize the study of arithmetic and geometric progressions, allow further and consolidated study of the mathematical foundations, addressing contents that are often obscure and complex in a simpler way for high school students, so they can learn Mathematics in a more robust and integrated form, gaining confidence and autonomy.

Keywords: difference equation, generalization, induction, progressions, teaching.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Considerando a grande dificuldade de aprendizado em matemática por parte dos alunos das redes pública e particular de todo Brasil, especialmente na área de álgebra, é necessária uma medida integradora que possa ser introduzida nos conteúdos ensinados. E consequentemente nas ideias dos alunos sobre a relação entre a matemática e suas vidas e entre as outras disciplinas, que torne a apreensão e compreensão da ementa mais próxima, tornando-a real e interconectada, assim possibilitando que os alunos criem as relações que fundamentam o conhecimento.

Parte dessa dificuldade se deve aos Parâmetros Curriculares Nacionais que apresentam os conteúdos a serem ensinados de forma fragmentada e desconexa, complicando o processo de aprendizagem dos alunos e também dos professores, como diz Perrenoud (2002, p. 138), "Aos poucos, o processo de fragmentação do conhecimento caminhou no sentido da crescente subdivisão da própria ciência em multiplas disciplinas e a supervalorização do conhecimento disciplinar." e depois reforça, "Essa perspectiva parece estar em crise já há algum tempo.[...] quando a desconfiança na crença na ciência como um valor em si, independentemente do cenário de valores em que se insere, foi abalada,[...]"(PERRENOUD, 2002, p. 139). Assim se necessita cada vez mais de estratégias pedagógicas diferenciadas, para equilibrar a tendência. Este trabalho tem como objetivo principal solucionar esta situação problemática do ensino atual, mostrando como certos conteúdos de matemática, como equação diferença, podem ser utilizados como um elemento para a conciliação de diversos conteúdos do ensino médio, permitindo uma melhor comunicação entre o que se expõe na escola e a realidade, os problemas da sociedade atual, e a cultura.

Pensando nisso fica claro que a ferramenta certa que será utilizada é a equação diferença, pois por estar presente nas bases lógicas com que matematicamente expressamos diversas relações entre quantidades da nossa vida cotidiana, podemos entender melhor como se fundamentam as fórmulas de matemática, que muitas vezes são apresentadas sem uma relação com outras disciplinas, nossas vidas e até mesmo com outras áreas do conhecimento, faltando com o elemento que mais é necessário para a absorção da informação, que é a percepção de necessidade e utilidade, pois se aprende quando se utiliza, e vê-se eficiente.

O método de pesquisa deste trabalho procura um aprofundamento na teoria exposta, comprovando sua efetividade e veracidade através de pesquisa bibliográfica, que segundo Severino (2009, p. 122) "A pesquisa bibliográfica é aquela que se realiza a partir do registro disponível, decorrentes de pesquisas anteriores, em documentos impressos, como livros, artigos, teses etc.”, e se dará tendo caráter qualitativo, conforme as definições de Lüdke e André:

> Citações são freqüentemente usadas para subsidiar uma afirmação ou esclarecer um ponto de vista. Todos os dados da realidade são considerados importantes. O pesquisador deve, assim, atentar para o maior número possível de elementos presentes na situação estudada, pois um aspecto supostamente trivial pode ser essencial para a melhor compreensão do problema que está sendo estudado. (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p.12)

Este trabalho apresenta em sua estrutura cinco capítulos, o primeiro capítulo descreve sobre sequências, mostrando um conjunto de conceitos e definições preliminares necessários para o entendimento dessa pesquisa, e de onde as equações diferença emergem. Em seguida, no segundo capítulo enunciamos que o conteúdo das equações surge do estudo de sequências, que estão fortemente relacionadas e que muitas vezes aliadas a problemas da natureza, e resolvemos-na de forma geral. O terceiro capítulo se utiliza da teoria desenvolvida para explicar como as progressões aritmética e geométrica podem ser vistas como casos particulares de uma certa equação diferença, assim generalizando os casos e os colocando de forma a facilitar os estudos do ensino médio, onde este é ensinado separadamente, em aulas distintas, deixando-o sem a ligação que é necessária a um melhor entendimento. Continuando no quarto capítulo com aplicações das equações, onde nota-se a importância de emprega-las no cotidiano e em diversas áreas da ciência, tais como, na física, com a Lei do Resfriamento de Newton, movimentos uniforme e uniformemente variados; aplicações na matemática em si, como problemas de juros simples e compostos; e na biologia, como crescimento populacional, seja de bactérias ou de outros animais, entre outros. No quinto capítulo serão apresentadas sugestões pedagógicas sobre o ensino de equações diferença e outros assuntos decorrentes do ensino, por exemplo, de séries e sequências, já fazendo um fechamento do tema exposto onde concluímos o trabalho.

1 SEQUÊNCIAS

Durante o dia a dia, a necessidade de expressar certos eventos a partir de ações passadas é comum, e para isso existe uma ferramenta matemática chamada sequência. Ela permite que se organize os dados de forma a construir-se uma sucessão, com uma lei que relaciona os eventos de forma lógica e determinada, sendo que, um determinado evento depende de outro, anterior ou posterior, por exemplo: quando se junta quantidades, sejam moedas, dia após dia, o valor monetário que se tem depende do valor do dia anterior.

A definição de sequência encontrada na maioria dos livros didáticos como o "Matemática: Uma nova abordagem, progressões de Giovanni e Bonjorno" (2011) é "[...] qualquer função f cujo domínio é ℕ*." Uma sequência de termos é denotada $\{a_n\}$, que escrita de forma extensa se torna:

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} = a_1 \ , \ a_2 \ , \ a_3 \ , \ a_4 \ , \ \ldots \ , \ a_n$$

Ou seja toda sequência possui uma função donde é formada, esta função é denominada geratriz, ou geradora, portanto podemos considerar, por exemplo, a seguinte: $f\,(n) = n^2 + n + 1$, que geraria a sequência da seguinte forma, para cada termo $f\ (i)$ teremos um correspondente a_i da sequência, determinado pelo índice i, do seguinte modo: $f\,(1) = a_1$, $f\,(2) = a_2$, $f\,(3) = a_3$ e assim por diante, podemos considerar como sendo apenas uma mudança de notação, para facilitar o entendimento, mas não se pode esquecer que estes dois correspondentes pertencem a universos diferentes. Para o exemplo dado os termos correspondentes à sequência seriam: $(3 , 7 , 12 , 21 , \ldots)$.

Pode-se relacionar um termo a outro se utilizando uma equação com os elementos que participam dessa lei, por exemplo: seja essa lei, expressa pela equação:

$$a_n = 2 \times a_{n-1}$$

Em linguagem corrente, isso equivale a dizer que um certo termo da sequência tem valor igual ao dobro do anterior, e assim se determinam todos os termos, um após o outro. Esta lei é chamada de equação diferença, ou relação de recorrência, e recebe esse nome porque ela representa o valor da diferença entre alguns termos. E é a partir dela que se originam todas as propriedades da sequência. Assim como as das progressões aritméticas (P.A.) e também das progressões geométricas (P.G.). (SLOUGHTER, 2000).

Agrupando dados dessa forma é muito útil, e permite um estudo mais profundo das características dos eventos, muitos dos grandes matemáticos que deixaram seus nomes na história usavam equações diferença como base para desenvolver seus estudos, e muitas vezes chegavam às barreiras do conhecimento se utilizando apenas dos princípios de sucessão e das leis que regem as sequências.

1.1 A SEQUÊNCIA DE LEONARDO FIBONACCI

Nascido em 1.175 Leonardo Fibonacci provavelmente foi o primeiro matemático a descobrir a sequência numérica *(1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 21 , 29 , 50 , 79 , ...)*. Tudo isso foi surgindo de um problema sobre criação de coelhos, que ele mesmo formulou enquanto observava os coelhos, o qual se tornou um dos mais discutidos por Leonardo em seu livro Liber Abbaci. (GARBI, 2009)

> Quantos casais de coelhos serão reproduzidos cada mês, começando-se com um único casal, se todo mês cada casal produtivo gera um novo casal que se torna produtivo ao fim do segundo mês? (GARBI, 2009, p. 149)

Então ele supôs que não houvessem mortes e numerou cada mês como na sequência *(1, 2, 3, 4 , ...)*, chamando o número de casais que existiam no início de cada mês de n. Assim o número representa a quantidade de casais no início do mês $n+1$, vai ser a somatória dos casais já existentes no começo do mês n, contando mais os casais que nasceram no tal mês. Porém esses nascimentos são dos casais já com mais de um mês de idade, ou seja, são dos casais já existentes no começo do mês $n - 1$. (GARBI, 2009)

Portanto a sequência de Fibonacci representa a quantidade dos casais de coelhos ao começo de cada mês. Tudo isso descoberto por Leonardo, porém a sequência *(8 , 21 , 29 , 50 , 79 , ...)*, que também respeita a mesma lei, ocorre naturalmente como quantidade de pétalas de camadas diferentes de flores, como a margarida, a dália ou o girassol, e também em alguns padrões encontrados em seres vivos. (GARBI, 2009)

Em relação ao que aconteceu anteriormente, ela pode ser rescrita de outra forma, assim dividindo todos termos por U_n.

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1 + \frac{U_{n-1}}{U_n}$$

ou

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1 + \frac{1}{\frac{U_n}{U_{n-1}}} \tag{1.1.1}$$

Se o valor de *n* for aumentado indefinidamente, a relação

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}$$

vai obviamente chegar a algum limite, por exemplo, *L*, então:

$$\frac{U_n}{U_{n-1}}$$

chegará ao mesmo valor *L*, por sua definição de limite. Então se *n* chegar ao infinito a equação (1.1.1) se torna:

$$L = 1 + \frac{1}{L}$$

Multiplicando ambos os lados por *L*, gera: $L^2 - L - 1 = 0$, uma equação do segundo grau, que faz parte da ementa do ensino médio e fundamental. Determinando a raiz positiva da equação por Pitágoras, obtém-se:

$$L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Esse número recebe um nome especial por ser muito frequente na natureza e, por consequência, muito importante na matemática, o número φ.

$$\varphi = 1{,}61803398874...$$

Que é a relação áurea, muito frequente na natureza, e expressa a beleza entre proporções de segmentos, presentes nos ramos das árvores, no nosso corpo entre outros. (GARBI, 2009)

1.1.1 A origem do número de ouro

Também já se sabe que, na sequência de Fibonacci, qualquer divisão de um número da sequência pelo seu anterior, se produzem aproximações cada vez melhores do Número de Ouro, isso acontece quando na sequência original escolhe-se números cada vez maiores, o qual era um objeto de estudo mesmo antigamente quando surgiu a descoberta de sua relação com a sequência de Fibonacci, até os dias atuais, onde se encontram várias aplicações em campos da arte e da ciência.

O número 1,6180339... é encontrado na pintura de Leonardo da Vinci, como na natureza, nas folhas encontradas em um ramo de árvore até braços espirais logarítmicos de galáxias.

1.2 A ÁREA DE UM CÍRCULO

O problema da quadratura do círculo fascinou os Gregos por centenas de anos, quando, finalmente, Arquimedes o resolveu. Ele utilizou um método muito conhecido na época, que se chamava Método da Dupla Redução ao Absurdo, que será melhor explicado a seguir.

Considere o problema de Arquimedes, um circulo de raio unitário, centrado na origem de um sistema de coordenadas:

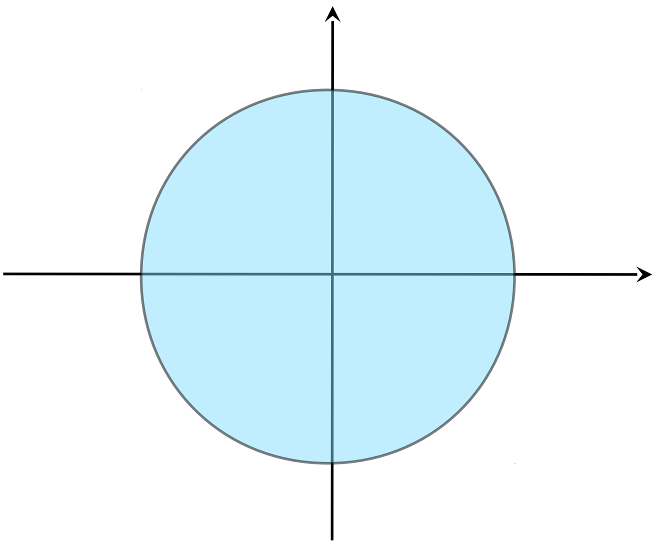

Figura 1 – Círculo unitário
Fonte Própria

Não é usual o calculo de áreas não poligonais, assim o Método consistia em inscrever polígonos regulares, e supor, *a priori* que a área descoberta era maior que a área do círculo, chegando a um absurdo, depois se repetia o método circunscrevendo os polígonos e supondo que a área destes é menor que a do círculo, deduzindo outro absurdo. Sua conclusão era, portanto, que se a área não poderia ser maior, nem menor, então ela só poderia ser igual à área do círculo. (GARBI, 2009) Os polígonos eram escolhidos pois se definem mais facilmente, como regiões no plano limitados por segmentos retos. Por exemplo, um quadrado que possui lados *a* tem área a^2 e um retângulo de lados *a* e *b* possui área *ab*. Portanto pode-se calcular a área de um paralelogramo de base *b* e altura *h* “cortando” um triângulo de uma de suas laterais, que pode depois ser “colado” de volta formando um retângulo, de lados *b* e *h*, ou seja ele possui área *bh*. Um triângulo, por ser metade de um retângulo, sua área é *ab/2*, se seu lado e sua altura forem *a* e *b* respectivamente.

Desse modo inscreviam-se polígonos regulares no círculo, conforme a figura 2.

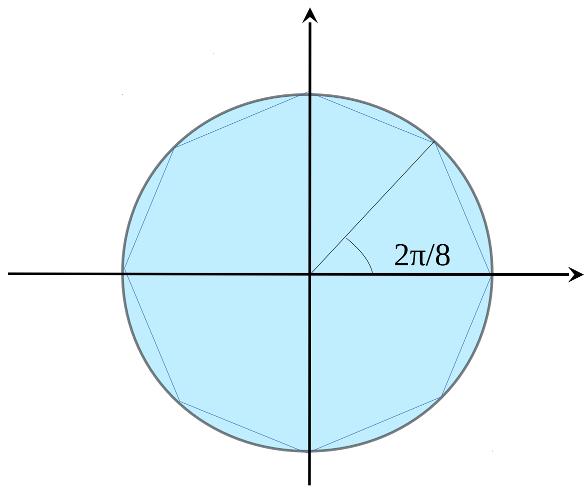

Figura 2 – Área do octógono aproximando a área do círculo.

Fonte própria

Seja P_n o polígono regular de *n* lados inscrito neste círculo e A_n sua área correspondente, a figura acima pode ser decomposta em *n* triângulos congruentes. Note que só é necessário o valor de *n* para se calcular as áreas. Portanto na figura acima está o caso em que $n = 8$, e nota-se que para cada triângulo inscrito no círculo o ângulo entre os lados de cada um dos triângulos no centro do círculo é $2\pi/8$, portanto a medida deste ângulo no caso geral será $2\pi/n$ radianos, onde π representa a razão entre o comprimento de círculo e seu diâmetro. Como os triângulos possuem lados iguais a *1*, sua altura será dada pela fórmula:

$$h_n = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

e sua base terá comprimento:

$$b_n = 2\ sen\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

E como a área dessa figura é *base* x *altura / 2* se tem:

$$A_\Delta = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \; sen\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{2} \; sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

Lembrando que na última igualdade foi usada a fórmula do arco duplo. Como o círculo é constituído de n triângulos, sua área será aproximadamente *n* vezes a área de cada triângulo, então multiplicando por *n* obtêm-se a área do círculo, ou seja:

$$A_n = \frac{n}{2} \; sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

Portanto essa sucessão de termos gera uma sequencia que conforme *n* aumenta a área do polígono inscrito se torna cada vez mais próxima da área do círculo unitário. Pode-se, então, construir um quadro com os valores de *n* e A_n.

Quadro 1: Valores gerados pela sequencia. Fonte: SLOUGHTER

i	3	4	5	6	7	8	9	10	...	50	100	1644
A_i	1.2990	2.0000	2.3776	2.5980	2.7364	2.8284	2.8925	2.9389	...	3.1333	3.1395	3.1415

Como pode ser visto, a sequencia parece se aproximar ao número π, e realmente o faz, pois esta é justamente a definição da área de um círculo unitário. Porém como esta é uma aproximação por dentro do círculo, ou seja, com valores menores que o real, os Gregos apenas escreviam $A_n \leq A$, sendo A a área real do círculo, depois repetiam todas estas etapas usando polígonos circunscritos no círculo, e concluíam que se B_n é essa aproximação da área, então $B_n \geq A$. Então podiam ter aproximações de π fazendo $A_n \leq \pi \leq B_n$, e para a época chegaram a valores muito próximos aos usados atualmente. Usando a notação de limite escreve-se: $\lim_{n \to \infty} A_n = \pi$. Outra célebre constante matemática que estará sempre sendo encontrada em diversos cálculos, de tópicos totalmente diferentes.

2 SOLUÇÃO GERAL DE UMA EQUAÇÃO DIFERENÇA LINEAR DE 1ª ORDEM

A teoria começa em se observar os padrões que ocorrem em certas sequências, definindo as suas inter-relações para um estudo mais aprofundado. As implicações na resolução de uma equação diferença são um ponto importante no ensino médio, pois são necessários conhecimentos de indução matemática, séries e notação somatória, dos quais apenas o primeiro é apresentado no E.M. com alguma rigorosidade, esta é uma oportunidade de reforçá-lo, mostrando mais uma utilidade da teoria ensinada. Os outros são geralmente abordados secundariamente e em outras situações, por exemplo, quando se estudam progressão aritmética e geométrica, e números complexos. A exposição deste contexto enriquecerá o repertório de aplicações do que se aprende, reforçando sua necessidade, se tornando mais palpável aos alunos.

Para prosseguir para a resolução das equações enunciadas anteriormente, precisa-se antes de conhecimentos sobre somas, ou seja, precisa-se desenvolver uma notação mais eficiente, e explorar suas propriedades, para que seu uso seja claro e preciso.

2.1 NOTAÇÃO SOMATÓRIA OU SIGMA

Quando é necessário expressar um grande número de adições, até mesmo um número infinito de vezes, fica inviável o uso da notação convencional de adição (+) para longos termos como pode ser visto abaixo.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \dots$$

Mesmo utilizando a reticências o cálculo torna-se impreciso, e tanto na Matemática quando nas outras ciências não há lugar para imprecisão. Para tal fato se utiliza uma notação compacta e muito eficiente, chamada de Sigma, ou Somatória. O nome Sigma vem da letra Grega Σ, que seria correspondente à letra S maiúscula, das línguas derivadas do latim, significando soma, adição ou somatório.

2.1.1 Definição

A definição comumente encontrada nos livros de matemática é, segundo James Stewart, (2008, apêndice a34) "Se $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ forem números reais e m e n, inteiros tal que $m \leq n$,

então $\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{n-1} + a_n$ "

Depois explica: "Assim o símbolo $\Sigma_{i=m}^{n}$ indica uma soma na qual a letra i (denominada **índice da somatória**) assume valores inteiros consecutivos começando em m e terminando em n, isto é, $m, m+1, \ldots, n$." (STEWART, 2008, apêndice a34).

Mas não é suficiente apenas uma nova notação, embora esta resolva praticamente todo o problema, ainda é necessário um conjunto de propriedades que facilite as operações com essa nova notação.

2.1.2 Propriedades

Para que certas operações com a notação Sigma tornem-se mais simples o seguinte teorema resume algumas propriedades:

> Se c for uma constante qualquer (isto é, não depende de i), então
>
> (a) $\sum_{i=m}^{n} ca_i = c \sum_{i=m}^{n} a_i$ (b) $\sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i$
>
> (c) $\sum_{i=m}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i - \sum_{i=m}^{n} b_i$ (STEWART, 2008, apêndice a35)

Com essa nova notação e as relações estabelecidas o estudo de séries pode prosseguir e se desenvolver, para depois se resolver uma equação diferença. Existem mais propriedades, mas como elas dependem de operações específicas, como integrais, logaritmos, entre outras, não será necessária sua apresentação.

2.2 SÉRIES

Agora que já foi desenvolvido certo conhecimento sobre sequências, a teoria de séries torna-se mais próxima, podendo ser vista como uma extensão. Seu valor histórico é inestimável, e quase todos os grandes matemáticos publicaram tratados, teoremas, e cálculos avançadíssimos sobre as séries mais polêmicas da época, elas podem ser usadas em conjunto com as sequências já estudadas. Segundo Sérgio Sonnino e Victor Mirshawka, as séries são definidas da seguinte forma:

Seja dada uma sequência qualquer a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , … , a_n . Pode-se definir a seguinte:

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

E seguindo este raciocínio se têm: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ .Onde o termo a_n recebe o nome de termo geral da sequência, e S_n chama-se soma n-nésima da série. Está claro agora que série significa soma dos termos de uma certa sequência, sendo muito comum indicá-la por:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Notação já definida anteriormente, e esta mostra mais uma vez sua utilidade e versatilidade. A teoria aqui definida será de importância crucial para o desenvolvimento de novas relações e conceitos, como o de ordem e precisão, reforçando os estudos. Agora se pode resolver as equações diferença que permeia esse trabalho.

2.3 RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENÇA

Até agora foram abordados exemplos de sequências importantes para o estudo que realizaremos, e que já possuíam a notação característica de equações diferença, e soluções simples por recursão, a equação abaixo, onde a e b são constantes e $a \neq 0$, generaliza as equações do tipo apresentado.

$$x_{n+1} = a\ x_n + b \tag{2.1}$$

Esta se chama de equação diferença linear de 1ª ordem, que representa o caso mais simples que poderíamos considerar, felizmente esta já é capaz de solucionar muitos problemas de matemática que enfrentamos, seja na escola ou no dia a dia. E ainda assim é de fácil resolução.

Trabalhando de forma recursiva, expressaremos alguns termos de forma indutiva.

O termo em que *n = 1* é:

$$x_2 = ax_1 + b \tag{2.2}$$

O termo *n = 2* é:

$$x_3 = ax_2 + b \tag{2.3}$$

Substituindo (2.2) em (2.3), ou seja trabalhando recursivamente, pois usamos os valores dos termos anteriores na equação. Então tem-se:

$$x_3 = a\ (ax_1 + b) + b \tag{2.4}$$

Que se condensa para:

$$x_3 = x_1\ a^2 + ab + b \tag{2.5}$$

Continuando com n = 3:

$$x_4 = ax_3 + b$$

Utilizando o resultado em (2.5):

$$x_4 = a\ (x_1\ a^2 + ab + b) + b$$

Simplificando temos:

$$x_4 = x_1\ a^3 + a^2\ b + ab + b$$

Neste ponto já se pode notar um certo padrão, facilitando ainda mais o estudo, e esse fenômeno chamará atenção, deixando os alunos muitas vezes intrigados com os resultados. Continuando com *n = 4* temos:

$$x_5 = x_1\ a^4 + a^3\ b + a^2\ b + ab + b$$

Pode-se compactar um pouco a equação, deixando o padrão encontrado mais evidente:

$$x_5 = x_1 \ a^4 + a^3 \ b + a^2 \ b + ab + b$$

Donde facilmente percebe-se que o número multiplicando *b* é a soma das potências de *a* iguais a *n*, e que o expoente de *a* é *n - 1*. Portanto para o caso em que *n = k*, teremos:

$$x_{k+1} = x_1 \ a^k + b \ \left(a^{k-1} + a^{k-2} + \ldots + a^3 + a^2 + a + 1\right) \tag{2.6}$$

Esta soma será feita separadamente, por fins didáticos, vale ressaltar a importância da notação de somatória neste estágio, sendo um assunto que pode ser estudado com mais clareza durante as aulas, reforçando sua necessidade. Destacando a soma que ocorre em (2.6), tem-se:

$$a^{k-1} + a^{k-2} + \ldots + a^3 + a^2 + a + 1$$

Notamos facilmente que os termos formam uma progressão geométrica (P.G.) de razão *a*, e primeiro termo $a^o = 1$, e que a expressão acima é a soma dessa P.G. Portanto pode-se usar a formula da soma de P.G. que é usualmente ensinada para o E.M., mas para enriquecer o ensino podemos nos utilizar da notação de somatória, podendo até ser utilizada uma aula explicativa a parte, para os alunos compreenderem melhor sua utilização, regras e propriedades. Com a notação descrita, temos o seguinte:

$$\sum_{i=1}^{k} a^{i-1} = a^{k-1} + a^{k-2} + \ldots + a^3 + a^2 + a + 1 \tag{2.7}$$

Com essa notação, a equação (2.6) torna-se:

$$x_{k+1} = x_1 \ a^k + b \ \sum_{i=1}^{k} a^{i-1}$$

Multiplicando (2.7) por a, temos:

$$a \ \sum_{i=1}^{k} a^{i-1} = a^k + a^{k-1} + \ldots + a^4 + a^3 + a^2 + a \tag{2.8}$$

Agora subtraindo (2.7) de (2.8) temos:

$$a \sum_{i=1}^{k} a^{i-1} - \sum_{i=1}^{k} a^{i-1} = a^k + a^{k-1} + \dots + a^4 + a^3 + a^2 + a$$
$$-\left(a^{k-1} + a^{k-2} + \dots + a^3 + a^2 + a + 1\right)$$

Onde ocorre o cancelamento dos termos a^k entre parênteses embaixo e na direita, um a um, reduzindo-a para:

$$a \sum_{i=1}^{k} a^{i-1} - \sum_{i=1}^{k} a^{i-1} = a^k - 1$$

Agrupando os termos comuns (somatória), tem-se:

$$(a-1) \sum_{i=1}^{k} a^{i-1} = a^k - 1$$

Como foi definido $a \neq 1$, pode-se dividir por *(a - 1)*, para poder determinar o valor da soma, encontra-se:

$$\sum_{i=1}^{k} a^{i-1} = \frac{a^k - 1}{a - 1} \tag{2.9}$$

Portanto foi encontrado o valor que faltava na equação (2.6), essa bela viagem pela matemática enriquece o pensamento lógico e criativo dos alunos, sendo necessário muitos conceitos presentes nos cálculos, como indução matemática, que agora também está sendo abordada no E.M. O professor pode sugerir que os alunos demonstrem novamente em casa, como tarefa, e depois corrigir em sala, junto aos alunos.

Voltando à equação (2.6), a expressão toma a forma a seguir.

$$x_{n+1} = x_1 a^n + b\left(\frac{a^n - 1}{a - 1}\right)$$

Onde como já foi dito, $a \neq 1$. A equação (2.1) pode ser geradora de vários tipos de séries, ao aplicar a relação de recorrência indefinidamente, e dispor os resultados de forma ordenada.

Para o caso em que $a = 1$, será melhor explicado em seguida, pois sendo um caso particular, requer estratégias específicas. Serão considerados outros casos, que também são muito importantes no ensino médio, geralmente fazendo parte da ementa, e muito frequentes na natureza, auxiliando na aprendizagem. Somente dando um polimento maior à equação diferença resolvida, chegamos no seguinte:

$$x_{n+1} = a^n \left(x_1 + \frac{b}{a-1} \right) - \frac{b}{a-1} \tag{2.10}$$

Onde se observa um caráter puramente exponencial na equação diferença, fechando a demonstração, relembrando a necessidade de muita teoria de outras áreas da matemática, portanto este é um bom momento para o professor avaliar se os conteúdos foram realmente absorvidos pelos alunos.

3 PA. E PG. COMO CASOS PARTICULARES DE EQUAÇÕES DIFERENÇA

Usando a equação diferença do capítulo anterior, (2.1):

$$x_{n+1} = a \ x_n + b \tag{2.1}$$

Podemos separá-la em dois casos:

(a) O caso em que teremos a diferença entre dois termos consecutivos e quaisquer igual, e que gera uma sequência conhecida como progressão aritmética (P.A.).

(b) O caso em que a razão entre dois termos consecutivos e quaisquer é igual, gerando uma sequência conhecida como progressão geométrica (P.G.).

3.1 PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Segundo Gelson Iezzi *et al*, (1981, p. 05) "Chama-se *progressão aritmética* uma seqüência em que, a partir do segundo elemento, a diferença entre cada elemento e seu antecessor é constante.". E define a diferença entre os termos da seguinte forma: "A referida diferença constante é chamada razão da P.A. e é indicada por *r*." (IEZZI; *et al*, 1981, p. 05)

Observa-se que ao substituir $a = 1$ na equação acima, se obtém uma série cujos termos obedecem aos de uma progressão aritmética de razão b, isso já é evidencia suficiente para um estudo mais profundo do caso.

Fazendo $a = 1$, e considerando $b \neq 0$, na equação, obtém-se o seguinte:

$$x_{n+1} = x_n + b \tag{3.1}$$

Que gera a seguinte série conforme a tabela abaixo.

Tabela 1: Valores de x_n em relação a n, no caso $a = 1$ e $b \neq 0$

n	0	1	2	3	4	...	n
x_n	x_0	$x_0 + b$	$x_0 + 2b$	$x_0 + 3b$	$x_0 + 4b$	...	$x_0 + nb$

A diferença entre os termos sucessivos é constante e igual a b, que é justamente a propriedade da P.A., em palavras, para que uma sequência seja uma progressão aritmética, é suficiente e necessário que a diferenças entre seus termos sucessivos sejam constantes e iguais. Portanto toda P.A. pode ser definida a partir de uma equação diferença tomando-se $a = 1$ e escolhendo-se b e x_0. Normalmente a notação é modificada para que se possa perceber melhor as diferenças entre as equações, e utiliza-se a letra r no lugar da b, pois ela remete à palavra razão, que no estudo da P.A., como foi definido anteriormente, é a diferença entre dois termos quaisquer, a partir do segundo e consecutivos, que não são mais chamados x_n e sim a_n. Desse modo ela se torna:

$$a_{n+1} = a_n + r$$

3.2 PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

A definição de P.G. é, segundo Gelson Iezzi (1981, p. 14): "Chama-se *progressão geométrica* uma seqüência de elementos não nulos em que, a partir do segundo, o quociente de cada elemento pelo seu antecessor é constante."

Retornando à equação (2.1), e tomando o caso particular onde $a \neq 1, a \neq 0, e\ b = 0$, obtemos a seguinte configuração:

$$x_{n+1} = a\ x_n$$

Utiliza-se o mesmo recurso do caso da P.A. e obtém-se a tabela:

Tabela 2: Valores de x_n em relação a n, no caso $a \neq 1$, $a \neq 0$, e $b = 0$

n	0	1	2	3	4	...	n
x_n	x_0	$a.x_0$	$a^2.x_0$	$a^3.x_0$	a^4x_0	...	$a^n.x_0$

Onde claramente se vê uma progressão geométrica de razão a. Unificando os resultados, fica claro que os dois casos podem ser cobertos por uma única e eficiente equação, de onde facilmente pode-se novas relações e expandir a compreensão de séries geométricas, aritméticas e outras, selando de forma integral um conteúdo que é muitas vezes apresentado de forma fragmentada, dificultando os estudos e até impossibilitando a construção de novas relações.

4 EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO E APLICAÇÃO

Neste capítulo serão apresentadas algumas aplicações de equações diferença na matemática e em outras áreas do conhecimento, mostrando como são de extrema importância para a compreensão de diversos fenômenos do nosso mundo físico. Todas elas podem ser introduzidas facilmente no ensino médio, uma vez que se tenha entendimento da equação apresentada no capítulo anterior, objetivando incentivar o estudo da matemática e das outras ciências, concebendo um conceito chamado de Interdisciplinaridade, que segundo Ivani Fazenda (2001, p. 21) “A lógica que a interdisciplinaridade imprime é a da invenção, da descoberta, da pesquisa, da produção científica, porém gestada num ato de vontade, num desejo planejado e construído em liberdade.” permitindo que os alunos vejam a utilidade do que estão aprendendo e se interessem de forma mais ativa e presente, combatendo aquele preconceito de aprender, que muitas vezes é apenas preguiça devido ao conteúdo não prender a atenção, ou não ser de interesse geral. Pode-se mostrar a facilidade como se expressam certas quantidades, sejam elas a localização de uma bola que rola por uma superfície durante certo período, a uma velocidade constante, ou que muda de velocidade sempre da mesma forma, ou a temperatura de um copo de chá quente, que num dia frio vai esfriando lentamente, o crescimento de certa população de animais de alguma espécie, entre outras, que serão melhor explicadas mais adiante.

Para que o conteúdo se torne relevante na prática docente e incentive o estudo de tal. Os conteúdos a seguir podem ser introduzidos na forma de exercícios, para que haja um reforço no aprendizado da matéria e que sua importância na vida moderna fique solidificada.

4.1 AS EQUAÇÕES DIFERENÇA DOS MOVIMENTOS UNIFORME E UNIFORMEMENTE VARIADOS

Em física, o que se denomina de movimento, consiste em especificar de momento a momento, a posição de um ponto no espaço relativo a um sistema de coordenadas. Para ilustrar como as equações diferença representam o movimento.

4.1.1 Movimento Uniforme

Pode-se utilizar do seguinte caso simples: considere um ponto viajando numa linha reta, mudando sua posição (x) medida em centímetros, conforme o tempo (t) medido em segundos, sempre da mesma forma, então de imediato se vê que o ponto percorre distancias iguais em intervalos de tempo iguais. Portanto pode-se descrever tal fato pela equação:

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x \tag{4.1.1}$$

Onde Δx é a diferença de posição entre dois valores de tempo consecutivos. Para se determinar a posição do ponto sem que seja necessário todos os termos anteriores, pode-se escolher um termo, e escrever todos os seguintes em relação àquele. Isso se chama resolver a equação diferença. Escolhendo o termo x_0 , os seguintes termos estão dispostos na tabela abaixo.

Tabela 3: Equações geradas por determinados valores de *n*.

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_i	x_n
x_0	$x_0+\Delta x$	$x_0+2\Delta x$	$x_0+3\Delta x$	$x_0+4\Delta x$	$x_0+i\,\Delta x$	$x_0+n\,\Delta x$

A última equação da tabela é:

$$x_{n+1} = x_n + n\Delta x$$

A chamada de solução da relação de recorrência, que foi citada acima. Note que ela expressa x_n em função de n diretamente, desse modo fica fácil determinar a posição do ponto sabendo-se o deslocamento entre dois intervalos de tempo. (BORN,1962)

4.1.2 Movimento Uniformemente Variado

No estudo do movimento de corpos pelo espaço, muitas vezes é suficiente considerar um movimento com mudanças bruscas de velocidade, invés de uma mudança contínua durante todo o tempo, que se torna muito difícil e envolve ideias matemáticas mais avançadas e sofisticadas. No caso das mudanças repentinas, o estudo torna-se mais simples, pois há a possibilidade de se tomar caso a caso os estágios do movimento, e então relacioná-los por equações que estão no domínio discreto, e por isso são mais simples de forma geral.

Pode-se considerar o seguinte caso: Se as mudanças de velocidade ocorrem de forma periódica, a cada intervalo de tempo de τ segundos, ou qualquer outra unidade de tempo, e forem de mesma intensidade, o movimento é chamado de movimento uniformemente variado (M.U.V.). A observação é feita durante um período t, então cada intervalo de mudança de velocidade será:

$$\tau = \frac{t}{n}$$

Onde n representa a quantidade de mudanças de velocidade, que ocorrem durante o movimento, ao fazer isso, divide-se todo o percurso do corpo, em partes iguais em intervalo, deixando uma base sólida para um estudo discreto mais aprofundado, governado por equações diferença, que facilmente relacionarão os estágios, por métodos simples de serem resolvidos. (BORN, 1962)

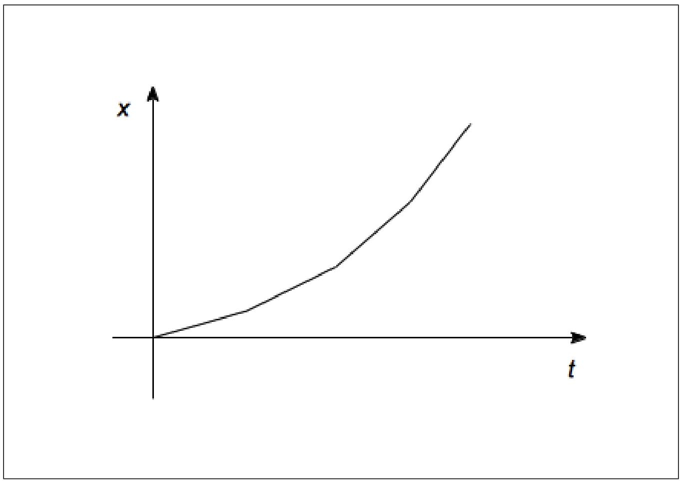

Gráfico 1: Movimento dividido em intervalos.
Fonte: Própria

Para continuar, a mudança de velocidade será representada pela letra w, como o movimento está dividido em partes igualmente espaçadas, e a alteração de velocidade tem sempre a mesma intensidade, a mudança total de velocidade é, se ocorrem n durante o experimento: $n.w$; e chama-se de aceleração a quantidade w / τ , que será indicada por a, ou seja $w = a \cdot t / n$. (BORN, 1962)

Então a velocidade do corpo ao passar de um intervalo para o outro se determina se adicionando w à sua velocidade anterior. Se o corpo no momento em que se inicia seu estudo possuía velocidade v_0, então a equação diferença que relaciona seu estado com o intervalo ao qual ele pertence é:

$$v_n = v_{n-1} + \omega$$

Que ao ser resolvida gera:

$$v_n = v_0 + n\ \omega \qquad (4.1.2.1)$$

E seguindo essas equações o corpo segue seu movimento, de modo que a partir do primeiro intervalo de tempo sua posição x no espaço é $x_1 = x_0 + v_1\ t / n$, e, a partir do segundo é $x_2 = x_1 + v_2\ t / n = x_0 + (v_1 + v_2)\ t / n$, e assim por diante. Desse modo depois do enésimo intervalo de tempo o corpo terá chegado à posição:

$$x_n = x_0 + (v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n)\ \frac{t}{n} \qquad (4.1.2.2)$$

Resolvendo separadamente a soma $(v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n)$ que aparece acima se tem:

$$v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n = (v_0 + \omega) + (v_0 + 2\ \omega) + (v_0 + 3\ \omega) + ...\ (v_0 + n\ \omega) \qquad (4.1.2.3)$$

Pois $v_1 = v_0 + w$, $v_2 = v_0 + 2w$, $v_3 = v_0 + 3w$ e assim sucessivamente, usando a equação mostrada em (4.1.2.1). Rescrevendo (4.1.2.3) obtêm-se:

$$v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n = nv_0 + \omega\ (1 + 2 + 3 + 4 + ... + n) \qquad (4.1.2.4)$$

Essa última sequência em (4.1.2.4) é famosa por ter sido resolvida por Gauss, aos sete anos de idade, quando descobriu que podia ser facilmente calculada somando-se o 1º com o último termo, o 2º termo com o penúltimo e assim por adiante, até se obter $n / 2$ pares, então a soma de cada par é $(n + 1)$, portanto ter-se-á $(n + 1)\ n / 2$. O que resulta em:

$$nv_0 + \omega\ (1 + 2 + 3 + 4 + ... + n) = nv_0 + \omega\ (n + 1)\ \frac{n}{2}$$

Substituindo w por $a\ t / n$:

$$nv_0 + \omega \ (n+1) \ \frac{n}{2} = nv_0 + \frac{at}{n} \ (n+1) \ \frac{n}{2} = nv_0 + \frac{at}{2} \ (n+1)$$

Substituindo em (4.1.2.2) o resultado obtido finalmente gera a equação discreta do M.U.V.: (BORN, 1962)

$$x_n = x_0 + \left(nv_0 + \frac{at}{2} \ (n+1) \right) \frac{t}{n} = x_0 + v_0 \ t + \frac{at^2}{2} \left(\frac{n+1}{n} \right) \qquad (4.1.2.5)$$

Por meio de uma análise em que se tomam valores cada vez maiores para n, ou seja, quando os intervalos são tão pequenos que já não se pode perceber as mudanças de velocidade, portanto o movimento se torna suave, obtendo-se o caso contínuo. Observa-se então que a relação mais à direita, $(n + 1) / n$, tende a 1, e a equação é rescrita. A equação (4.1.2.5) é transformada na equação contínua do M.U.V., e colocada do jeito que é mais comum de ser encontrada em livros e apostilas, normalmente destinados aos alunos do ensino médio.

$$x_n = x_0 + v_0 \ t + \frac{at^2}{2} \qquad (4.1.2.6)$$

Dessa forma é possível introduzir aos alunos do ensino médio ideias de infinito, indução matemática e a diferença entre variáveis discretas e contínuas, complementando e solidificando o ensino de física e matemática no ensino médio.

4.2 MODELO DE MUDANÇA DE TEMPERATURA DE CORPOS

É possível modelar por equações diferença a mudança de temperatura de corpos mantidos em um ambiente com temperatura constante, para isso existe a Lei do resfriamento de Newton, embora o nome indique queda de temperatura, essa lei também é valida para aumento, ou seja, aquecimento, partindo de princípios indutivos, Newton desenvolveu a seguinte fórmula:

$$T_{n+1} - T_n = k \ (T_n - T_e) \qquad (4.2.1)$$

Nesta equação, T_n representa a temperatura do corpo estudado em um certo momento n, e

T_e é a temperatura externa, considerada constante, onde se encontra o corpo. Essa equação diferença modela a mudança de temperatura de objetos em ambientes mantidos à temperatura constante, como um copo de chocolate quente esfriando na mesa, em um dia frio, ou uma jarra de limonada esquentando num dia quente. Ela diz que a mudança na temperatura do corpo é proporcional à diferença de temperatura entre o ele e o ambiente, ou seja, se as temperaturas do corpo e do ambiente são muito diferentes, implicam em taxas de resfriamento ou aquecimento altas. (SLOUGHTER, 2000)

Dando o tratamento da teoria desenvolvida no segundo capítulo, deve-se primeiro rescrevê-la da seguinte forma:

$$T_{n+1} = (k + 1)\ T_n - kT_e$$

Então usando a fórmula do termo geral encontrada em (2.10) a solução da equação diferença acima é:

$$T_n = (k + 1)^n\ T_0 - kT_e \left(\frac{(k + 1)^n - 1}{k}\right)$$

Que se simplifica para:

$$T_n = (k + 1)^n\ (T_0 - T_e) + T_e$$

Observe que a solução depende apenas do termo geral da sequência, como nos outros casos, o limite quando $n \to \infty$ a temperatura do corpo tende a ambiente, se $-1 < k < 0$. Caso contrário a série diverge e a temperatura do corpo tende ao infinito. Para tal pode-se escrever para os alunos a notação correta de limite, pois depois de ter enunciado o significado, o ato de escrever apenas concretizará as ideias expostas. (SLOUGHTER, 2000).

$$\lim_{n \to \infty} T_n = T_e$$

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho propõe um maior conhecimento sobre equações diferença, estabelecendo conexões entre progressão aritmética e progressão geométrica, permitindo um levantamento de informações de conteúdos matemáticos, assim melhorando conhecimentos e correlacionando todo o material, abordando e mostrando fórmulas de equações diferença lineares de 1ª ordem.

Essa pesquisa ajuda exatamente nisso, explicando como as progressões devem ser estudadas permitindo à conexão entre os diversos conceitos matemáticos, buscando relevância cultural, que diz respeito à aplicações dentro da Matemática.

Embora uma fórmula geral de uma P.A., sugira essa conexão, não encontramos claramente nos livros didáticos, e sim, assuntos que parecem ser diferentes, mas estão bem relacionados.

Há um desenvolvimento de conceitos, que mostre a importância das equações diferença em nosso cotidiano e que elas generalizam a progressão aritmética e geométrica, abordando uma forma mais simples para alunos de ensino fundamental e ensino médio para que se aprenda Matemática, além de ganhar confiança e autonomia.

Dessa forma mostra ao leitor as semelhanças e as diferenças entre as progressões aritméticas e geométricas. Outra coisa que fica evidente é que a escrita das progressões de forma geral desenvolve a capacidade de visualização e de comportamento dos acontecimentos. Isso conclui e cria uma rede repleta de informações sobre o tema e entre a Matemática e a realidade.

REFERÊNCIAS

BORN, Max. *Einstein`s theory of relativity*. New York: Dover, 1962.

FAZENDA, Ivani. *Didática e Interdisciplinaridade.* 4 ed. Campinas: Parirus, 2001

GARBI, Gilberto Geraldo. *A rainha das ciências*. 5 ed. São Paulo: Livraria da Física. 2008.

GIOVANNI; BONJORNO. *Matemática: Uma nova abordagem, progressões.* (2011)
IEZZI, Gelson; *et al. Tópicos de matemática.* 2 ed. São Paulo: Atual, 1981.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E. D. A. *Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas*. São Paulo: EPU, 1986.

SEVERINO, Antônio Joaquim. *Metodologia do Trabalho Científico*. 23 ed. São Paulo: Cortez, 2009.

SLOUGHTER, Dan. *Difference Equations to Differential Equations*. Disponível em: <http://www.synechism.org/wp/difference-equations-to-differential-equations/>. Acesso em 30 abr. 2013.

SONNINO, Sérgio; MIRSHAWKA, Victor. *Séries.* São Paulo: Nobel, 19??

STEWART, James. C*álculo, volume I.* 5 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2008

PERRENOUD, Philipe. *10 Novas competências para ensinar: Convite à viagem.* Porto Alegre: Artmed, 2008