

**UNIVERSIDADE PRESBITERIANA MACKENZIE**

**Brian Lee Mayer**

**UM MODELO DE SISTEMA VISUAL BASEADO  
EM REDES DE NEWMAN-WATTS ACOPLADAS**

São Paulo  
2016

**UNIVERSIDADE PRESBITERIANA MACKENZIE  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA ELÉTRICA E COMPUTAÇÃO**

**Brian Lee Mayer**

**UM MODELO DE SISTEMA VISUAL BASEADO  
EM REDES DE NEWMAN-WATTS ACOPLADAS**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica e Computação da Universidade Presbiteriana Mackenzie como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica e Computação.

**Orientador: Prof. Dr. Luiz Henrique Alves Monteiro**

M468m Mayer, Brian Lee

Um modelo de sistema visual baseado em redes de  
Newman-Watts acopladas / Brian Lee Mayer - 2016.  
53f.: il., 30 cm

Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica e  
Computação) – Universidade Presbiteriana Mackenzie, São  
Paulo, 2016.

Orientação: Prof. Dr. Luiz Henrique Alves Monteiro  
Bibliografia: f. 45-47

1. Neurociência computacional. 2. Rede de Newman-  
Watts. 3. Rede neural. 4. Sincronismo. 5. Sistema visual. I.  
Título.

CDD 006.32

Careful with that spiral, Ulam.

Pink Floyd (adaptado).

## AGRADECIMENTOS

Agradeço à CAPES pela bolsa de mestrado, que permitiu que todo esse trabalho fosse possível. Agradeço à minha família por ter me colocado no mundo e me dado a educação que me trouxe até aqui, que me deu meus valores morais e éticos, a paixão pelas pessoas e pela ciência. Agradeço ao meu professor e orientador Luiz Henrique Alves Monteiro por todo o suporte, pareceria, incentivo e pelo grande prazer de poder trabalhar ao seu lado. Agradeço aos meus professores Pollyana Notargiacomo, Nizam Omar e Pedro Paulo Balbi, pela belíssima construção do conhecimento que me impulsionou. Agradeço à minha namorada, que esteve do meu lado incondicionalmente me apoiando. Agradeço aos meus amigos que estiveram ao meu lado e me apoiaram em momentos difíceis e nos bons também; especialmente ao Lucas, que sempre foi um grande parceiro e pesquisador, desde a graduação. Agradeço à Alex Martins pelo suporte computacional no início deste trabalho.

## RESUMO

Aqui, estuda-se a ocorrência de sincronismo em grafos de Newman-Watts acoplados, como um modelo de rede neural. A inspiração para esse estudo vem do sistema visual de mamíferos. A rede completa é formada por quatro grafos acoplados, sendo que cada par representa o núcleo geniculado lateral e o córtex visual de um hemisfério cerebral. Os hemisférios se comunicam por meio de um acoplamento entre os grafos que representam os córtices visuais. Esse acoplamento faz o papel do corpo caloso. A transição de estados dos neurônios ocorre em tempo discreto e obedece a um conjunto de regras determinísticas. A partir de estímulos periódicos vindos da retina, a atividade neuronal é calculada numericamente. O objetivo é determinar como os valores dos parâmetros relacionados à topologia da rede afetam o sincronismo entre os hemisférios.

**Palavras-chave:** *neurociência computacional, rede de Newman-Watts, rede neural, sincronismo, sistema visual.*

## ABSTRACT

Here, the occurrence of synchronism in coupled Newman-Watts graphs is studied, as a model of neural network. The inspiration for this study comes from the visual system of mammals. The whole network is formed by four coupled graphs, in which each pair represents the lateral geniculate nucleus and the visual cortex of a hemisphere. The hemispheres communicate due to a coupling between the graphs representing the visual cortices. This coupling makes the role of the corpus callosum. The state transition of the neurons occurs in discrete time and it follows a set of deterministic rules. From periodic stimuli coming from the retina, the neuronal activity is numerically computed. The goal is to determine how the values of the parameters related to the network topology affect the synchronization between the hemispheres.

**Keywords:** *computational neuroscience, neural network, Newman-Watts network, synchronism, visual system.*

# SUMÁRIO

<b>1.</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	6
<b>2.</b>	<b>PRELIMINARES</b>	8
2.1.	O SISTEMA VISUAL DE MAMÍFEROS	8
2.2.	NEURÔNIOS	12
2.3.	REDES COMPLEXAS	13
2.4.	SINCRONISMO	14
<b>3.</b>	<b>OS MODELOS</b>	16
3.1.	AUTÔMATO CELULAR	16
3.2.	TOPOLOGIA DOS GRAFOS	18
3.3.	ATIVIDADE DOS NEURÔNIOS	21
<b>4.</b>	<b>RESULTADOS</b>	24
4.1.	GRUPO 1	26
4.1.1.	Comentários	28
4.2.	GRUPO 2	29
4.2.1.	Comentários	32
<b>5.</b>	<b>MODELO EM EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS</b>	36
<b>6.</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	39
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	42
<b>7.</b>	<b>APÊNDICE</b>	45



# Capítulo 1

## Introdução

Um dos assuntos estudados em Neurociência é o sincronismo da atividade neuronal, pois se sabe que sincronismo é fundamental para a correta execução de certas funções cognitivas e sensoriais, como, por exemplo, a distinção de objetos num campo visual (Bloom & Hynd, 2005; Engel et al., 1991). Estudos teóricos sobre esse assunto envolvem modelos de redes neurais, em que grafos são empregados para representar redes de neurônios, de modo que cada nó do grafo representa um neurônio (Martins & Monteiro, 2013; Volk, 2000). Um modelo de rede que possui topologia similar àquela encontrada no cérebro de mamíferos é a rede de *Newman-Watts*, que é uma rede complexa do tipo mundo-pequeno. Ela é formada tomando-se uma rede regular e acrescentando ligações aleatórias. Essas ligações aleatórias extras reduzem o valor do menor caminho médio  $\ell$ , de modo que essa grandeza se torna proporcional ao logaritmo do número  $n$  de nós do grafo; isto é,  $\ell \sim \log(n)$  (He et al., 2007; Martins & Monteiro, 2013; Monteiro, 2014).

Estudos sobre a sincronização de atividade de neurônios estão se mostrando cruciais também para a compreensão de certas desordens neurológicas, como epilepsia, autismo, mal de Parkinson e esquizofrenia, pois alterações no sincronismo de certas áreas do cérebro mostraram estar correlacionadas com essas doenças (Uhlhaas, 2006). Assim, o estudo do sincronismo em redes neurais pode auxiliar na identificação de tais neuropatologias e no diagnóstico das mesmas. Além disso, existem protótipos de interfaces humano-robô que usam redes neurais para simular o aprendizado e a comunicação entre as partes como, por exemplo, o aplicativo Emergent\*. Em resumo, o estudo da sincronização de neurônios pode auxiliar na compreensão de neuropatologias e do funcionamento normal do cérebro e ainda levar à construção de máquinas inspiradas em redes neurais.

---

\* Link: [http://grey.colorado.edu/emergent/index.php/Main\\_Page](http://grey.colorado.edu/emergent/index.php/Main_Page)

O modelo de via neural de Martins (2011) mostrou-se capaz de simular a sincronia entre o núcleo geniculado lateral e o córtex visual, que se dá em função de estímulos periódicos vindos da retina. Retina e núcleo geniculado tendem a se sincronizar na mesma frequência (em torno de 60-120 Hz), que é mesma frequência observada na atividade neural do córtex visual quando o estímulo é estático e cerca de metade ou um terço da frequência do córtex visual (em torno de 30-60 Hz) quando o estímulo é dinâmico (Castelo-Branco et al., 1998a; Ito et al., 2010). Esse modelo reproduz esse fenômeno. Entretanto, nesse modelo, apenas uma via visual foi considerada; ou seja, o modelo representa apenas a atividade observada em um hemisfério do cérebro (Martins & Monteiro, 2013).

Pesquisas mostraram que o corpo caloso pode ser importante para a compreensão de imagens (Bloom & Hynd, 2005). Aqui, é desenvolvido um modelo computacional em que duas vias neurais estão acopladas pelo corpo caloso. O objetivo é investigar, por meio de simulações, a evolução temporal da atividade das duas vias quando estimuladas periodicamente. O método de investigação deste trabalho consistiu em:

1. gerar grafos que representam as vias neurais acopladas pelo corpo caloso;
2. usar regras para atualizar os estados dos neurônios a cada passo de tempo;
3. determinar a atividade dessa rede neural em regime permanente;
4. calcular o período de oscilação das partes que compõem as vias, a fim de verificar a ocorrência (ou não) de sincronismo;
5. analisar os resultados obtidos.

O *software* usado nesta dissertação foi o *Mathematica 10.4*, que possui integração de conceitos de linguagem de programação com suas próprias funções, o que permite manuseio de dados com eficiência. O *hardware* utilizado foi um computador Apple MacBook Pro com processador com clock de 2.9 GHz e 8 GB de memória RAM. Com isso, a montagem de uma rede com duas vias leva cerca de dez segundos e a posterior simulação de seu comportamento dinâmico cerca de três segundos.

No próximo capítulo, trata-se de conceitos básicos que foram necessários para a realização deste trabalho. Depois, apresentam-se o modelo em termos de rede complexa e de regras de autômato celular, e os resultados das simulações numéricas realizadas. Então, um modelo analítico em termos de equações de diferenças é proposto. Os resultados são sumarizados no capítulo final. O apêndice contém dados brutos gerados nas simulações.

# Capítulo 2

## Preliminares

Neste capítulo, descreve-se, superficialmente, o sistema visual dos mamíferos, a dinâmica de neurônios, e alguns tópicos relacionados a redes complexas e sincronismo.

### 2.1. O SISTEMA VISUAL DE MAMÍFEROS

O sistema visual é complexo e hierarquico (Scannell et al., 1999). O processo de cognição das informações visuais no cérebro de mamíferos depende do funcionamento adequado de várias estruturas e se fundamenta no caminho que o estímulo visual percorre. Esse caminho de transmissão de impulsos é chamado de via retino-genículo-cortical. Ele se inicia na retina, onde suas células geram sinais elétricos que são enviados para o nervo óptico (Brodal, 2010). Esse nervo transmite os impulsos nervosos até o núcleo geniculado lateral, uma estrutura presente em cada hemisfério cerebral e constituída de várias camadas, que processam informações oriundas de ambos olhos de forma segregada. Os impulsos são então conduzidos por axônios em direção ao córtex visual. Essa projeção de axônios é conhecida por irradiação óptica (Bear et al., 2006; Brodal, 2010) e estabelece uma conexão entre essas estruturas. No córtex, essas informações sofrem mais um processamento e daí seguem para diversas áreas do cérebro. Uma estrutura responsável pelo bom funcionamento do córtex, e que também complementa suas funções, é o corpo caloso, que desempenha funções essenciais no processo de cognição visual. A figura 1 ilustra a via de transmissão de informações visuais.

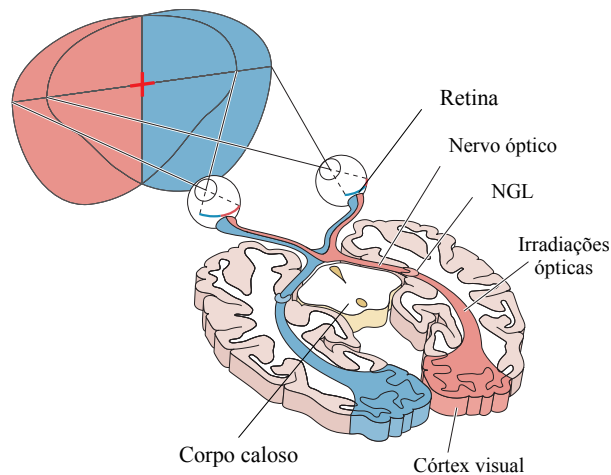


Figura 1: O sistema visual de mamíferos. Fonte: (Bear et al., 2006, p. 312, adaptado).

De forma bastante simplificada, essa via pode ser representada pela figura 2.

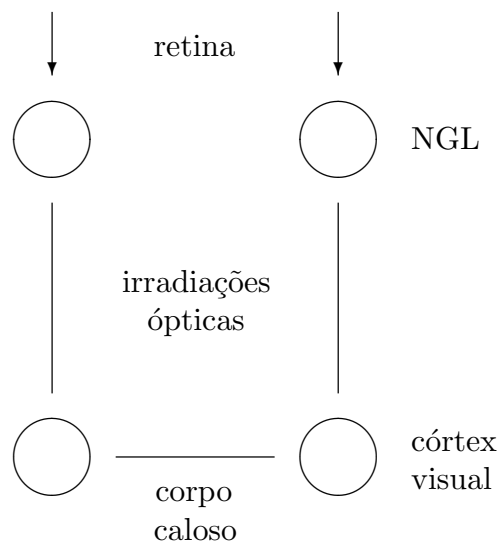


Figura 2: Representação simplificada da via retino-genículo-cortical.

Medições do nível de atividade do núcleo geniculado são, em geral, feitas na sua área 1 (Squire et al., 2008), que é conhecida por receber informações do nervo óptico. Medidas da atividade do córtex visual se dão, usualmente, nas áreas 17 e 18, também conhecidas como região V1. Nessas regiões, as populações de neurônios e o acoplamento entre eles formam uma rede complexa, densamente conectada e com propriedades não triviais (He et al., 2007; Yu et al., 2008). Por isso, a teoria de grafos tem se tornado importante para caracterizar a estrutura topológica do cérebro de mamíferos. De fato, têm-se usado conceitos dessa teoria para entender melhor o funcionamento do cérebro e seus padrões de conectividade. Uma propriedade do córtex descoberta em análises

de imagens de eletroencefalograma e de ressonância magnética é sua topologia típica de redes mundo-pequeno (He et al., 2007). Tais redes possuem a propriedade de que o menor caminho entre qualquer par de nós é “pequeno” (isto é, muito menor que o número de nós) em relação ao número de neurônios (Newman & Watts, 1999; Monteiro, 2014). Isso pode facilitar a ocorrência de sincronismo (Watts & Strogatz, 1998), como observado no córtex visual do gato (Castelo-Branco et al., 1998a). Portanto, modelos de redes neurais do tipo mundo-pequeno podem ser convenientes para descrever fenômenos oscilatórios observados no cérebro.

O caminho percorrido pela informação no sistema visual dos mamíferos se inicia nos olhos, onde ocorrem refrações para que a luz atinja de forma eficiente a retina. Ela é constituída de três camadas com diferentes tipos de neurônios. Inicialmente, os fótons atingem os cones e os bastonetes, que se tornam hiperpolarizados e geram sinais elétricos (Squire et al., 2008). Esses sinais são processados pelos neurônios da camada interna, dentre eles as células amácrinas e horizontais, e chegam até as células ganglionares. Essas células enviam os impulsos até os núcleos geniculados laterais pelos seus axônios, os quais constituem o nervo óptico. Características importantes dos impulsos vindos da retina são o tempo entre os pulsos elétricos e a quantidade deles. Além disso, o movimento do olho pode modelar de forma dramática esses impulsos (Gollisch, 2009).

Os núcleos geniculados laterais, localizados no tálamo dorsal – um em cada hemisfério – são estruturas constituídas de seis camadas, conhecidas por serem alvos dos axônios do nervo óptico. Eles recebem as informações de forma segregada, sendo que cada camada recebe impulsos diferentes de cada olho, indicando que há processamento paralelo (Bear et al., 2006). Acredita-se que, quando neurônios recebem fortemente estímulos de poucas fontes, como é o caso dos neurônios do núcleo geniculado lateral, então a tendência é ocorrer um sincronismo nos disparos dos mesmos (Usrey & Reid, 1999).

Após o processamento nos núcleos geniculados, as informações caminham pelas irradiações ópticas até o córtex visual primário, também chamada de área V1 (Bear et al., 2006; Squire et al., 2008). De modo simplista, é nessa área que se enxerga o mundo, pois essa é a região responsável pela percepção de forma, cor, movimento, profundidade e localização espacial (Bear et al., 2006; Brodal, 2010). Após a chegada dos sinais à área V1, ocorre a integração e o processamento final dessas informações, e o resultado é distribuído para outras partes do córtex e do cérebro.

O córtex visual possui nove camadas, onde se encontram basicamente dois tipos de neurônios: as células piramidais e as células estreladas, sendo que apenas as piramidais enviam sinais para fora do córtex visual (Bear et al., 2006). Esses neurônios podem ser encontrados em pelo menos quatro camadas e fazem poucas conexões com outros neurônios: tipicamente, quatro conexões com outras piramidais e nove com as estreladas.

Experimentos realizados em gatos mostraram que, na retina e no núcleo geniculado, a frequência de sincronismo é de 60 a 120Hz, quando o estímulo visual é dinâmico ou estático (Castelo-Branco et al., 1998a; Castelo-Branco et al., 1998b). No córtex visual, foi observado que há diferença de frequência conforme o estímulo: com luz em movimento obteve-se 30 a 60Hz, enquanto que com luz estática obteve-se 60 a 120Hz. Essa diferença não acontece com o núcleo geniculado. Isso sugere que há mecanismos diferentes de sincronização no córtex visual para estímulos de naturezas diferentes (Castelo-Branco et al., 1998a; Castelo-Branco et al., 1998b).

Outra estrutura relevante na cognição visual é o corpo caloso. Estudos com eletroestimulação mostraram que o corpo caloso possui conexões de entrada e saída com o córtex visual (Pietrasanta et al., 2012). Ele é uma estrutura em forma de “C” que permite que os dois hemisférios do cortex cerebral se comuniquem de forma mais eficiente e controlada, possibilitando uma diminuição no atraso que pode acontecer quando informações são trocadas entre áreas distantes no cérebro (Aboitiz, 2003). Ele é constituído de projeções axoniais mielínicas de grande diâmetro, que não são distribuídas homoganeamente, o que sugere diferenças no funcionamento de cada uma de suas partes e assimetria na velocidade de transmissão (Aboitiz, 2003).

A alta concentração de fibras calosais nas áreas 17 e 18 fazem com que o corpo caloso tenha um papel importante para as funções relacionadas com a cognição visual; dentre elas, a influência na maturação do córtex visual (Pietrasanta et al., 2012). O caminho da informação através do corpo caloso é essencial para a representação completa do campo ipsilateral e contralateral nas áreas 17 e 18; isto é, informações completas são transmitidas de um lado para o outro (Payne, 1994). Sabe-se também que essa estrutura altera o sincronismo das respostas dos neurônios na área 17 do gato, pois, após a secção do mesmo, esse sincronismo não foi observado (Engel et al., 1991).

Descobriu-se que o corpo caloso não está diretamente ligado à acuidade visual (Corballis et al., 2002), pois, em pacientes com calossotomia†, não foi registrada diminuição na qualidade da visão; entretanto, funções como orientação e localização foram comprometidas. A calossotomia, utilizada (apesar do risco) para tratar casos incuráveis de epilepsia, dá origem às chamadas “síndromes da desconexão”, que são caracterizadas pela ausência de transferência inter-hemisférica de informação. Exemplos dessas síndromes são: síndrome da mão alienígena, afasia tátil, negligência unilateral (Jea et al., 2008). Isto se dá devido a falhas no compartilhamento de informação entre os hemisférios. Assim, sem o corpo caloso, as informações de lados diferentes são tratadas de forma assimétrica, dando origem a esses comportamentos (Corballis, 2003).

Ainda é tema de debate se o corpo caloso possui um papel inibitório ou excitatório (Aboitiz, 2003). Por exemplo, foi descoberto que o corpo caloso pode inibir (diminuir) a transmissão de informações contraditórias entre os hemisférios, como foi detectado quando informações sonoras controversas eram apresentadas dicoticamente (uma em cada ouvido e ao mesmo tempo) a um paciente. Nesse caso, o corpo caloso tende a impedir que essas duas informações conflitantes sejam passadas de um hemisfério para o outro, permitindo assim que o lado dominante tome uma decisão (Bloom & Hynd, 2005). Entretanto, pesquisas mostraram que a maioria das conexões que ele possui são excitatórias (Schmidt, 2013), o que pode facilitar a integração das informações entre os hemisférios. Nesta dissertação, assume-se que o corpo caloso possui função excitatória.

## 2.2. NEURÔNIOS

Nosso cérebro possui cerca de  $10^{11}$  neurônios e  $10^{15}$  sinapses (Bear et al., 2006). Um milímetro cúbico de tecido cerebral contém cerca de 100 mil neurônios. Esses números tornam complicada a tarefa de modelar e entender a dinâmica do cérebro.

De forma simplificada, um neurônio pode ser dividido em três partes: dendritos, axônio e corpo celular. O neurônio é coberto por uma membrana lipoproteica que separa o citoplasma do meio externo. Constata-se que há uma diferença de potencial elétrico entre o interior do neurônio e seu meio externo. Esse potencial é chamado de *potencial de membrana* e vale aproximadamente  $-80\text{ mV}$  quando o neurônio está em repouso (Bear et al., 2006).

---

† Secção total ou parcial do corpo caloso por procedimento cirúrgico.

Devido à permeabilidade relativa da membrana aos íons de potássio ( $K^+$ ) e sódio ( $Na^+$ ), esse potencial se mantém em equilíbrio até que o neurônio seja estimulado por outros ou por efeitos externos. A concentração intracelular de  $K^+$  é maior do que a extracelular; já a concentração de  $Na^+$  é maior fora do que dentro da célula. Quando um neurônio recebe um estímulo que faz seu potencial de membrana superar um limiar (tipicamente de  $-50\text{ mV}$ ), canais permeáveis aos íons  $Na^+$  se abrem e rapidamente alguns desses íons fluem por difusão para o interior do neurônio, causando um aumento local significativo no potencial de membrana, que chega a  $+40\text{ mV}$ . Essa variação abrupta, repentina e reversível no potencial de membrana é chamado de *potencial de ação* (Bear et al., 2006). Após esse pico, canais permeáveis ao íons  $K^+$ , que se abrem mais lentamente, permitem que tais íons deixem o citoplasma por difusão, diminuindo o potencial de membrana. Após um potencial de ação, o neurônio fica refratário a estímulos, não reagindo a eles. Essa variação do potencial de membrana se propaga pelo axônio em forma de pulso, podendo chegar a dendritos de outros neurônios (Bear et al., 2006).

Como em outros trabalhos (Volk, 2000; Martins & Monteiro, 2013), aqui a dinâmica do neurônio é baseada em regras de transição de estados e seu estado é representado por uma variável binária: 1 se ativo, 0 se em repouso ou em período refratário.

## 2.3. REDES COMPLEXAS

Redes são representações por meio de grafos das relações entre pares de elementos de um determinado conjunto. Comumente, os elementos são chamados de nós e as relações são chamadas de arestas. No contexto deste trabalho sobre redes neurais, os nós são os neurônios e as arestas são as ligações sinápticas. Redes complexas são grafos aleatórios com topologia não trivial, mas que podem ser gerados a partir de regras simples (Monteiro, 2014).

As redes empregadas neste trabalho possuem propriedades topológicas que as caracterizam como redes complexas do tipo mundo-pequeno (*small-world*). Uma dessas propriedades está relacionada com a variação do *comprimento médio do caminho mais curto*  $\ell$  com o número  $n$  de nós da rede. Seja a distância entre dois nós  $i$  e  $j$ , escrita como  $l(i, j)$ , a menor quantidade de arestas a serem percorridas para se chegar de  $i$  a  $j$ . O comprimento médio do caminho mais curto  $\ell$  é o valor médio de  $l(i, j)$ , levando em conta todos os possíveis pares de nós  $i$  e  $j$  que constituem a rede (Monteiro, 2014). Em grafos regulares, é comum se obter valores de  $\ell$  proporcionais ao número de nós



$n$ . Porém, se troca-se parte das arestas regulares por arestas aleatórias,  $\ell$  passa a ser proporcional a  $\log(n)$ , como mostrado no trabalho de Watts & Strogatz (1998). Isso faz com que a informação se propague mais rapidamente em redes mundo-pequeno do que em redes regulares, pois as distâncias entre os neurônios ficam reduzidas graças às ligações aleatórias.

Redes neurais são redes mundo-pequeno (Sporns & Zwi, 2004; Sporns, 2011; Yu et al., 2008). Nesta dissertação, usam-se redes complexas mundo-pequeno do tipo Newman-Watts, que são aquelas construídas adicionando ligações aleatórias a um grafo originalmente regular (Newman & Watts, 1999; Monteiro, 2014).

## 2.4. SINCRONISMO

Como já foi mencionado, algumas neuropatologias estão associadas a níveis anormais de sincronismo. Por exemplo, pacientes com autismo e esquizofrenia tendem a ter um menor nível de sincronização, enquanto que pacientes com mal de Parkinson e epilepsia tendem a ter um nível maior (Uhlhaas, 2006). Esse é mais um dos motivos que torna relevante o estudo de sincronismo em redes neurais.

No nosso modelo, define-se sincronismo da seguinte maneira. Seja  $x_i$  a quantidade de neurônios ativos no reticulado  $i$ . Suponha que, após atingir o regime permanente,  $x_i$  oscile com período  $p_i$ . Então, os reticulados  $i$  e  $j$  são ditos sincronizados se  $p_i = \alpha p_j$ , com  $\alpha$  sendo um número racional (Martins & Monteiro, 2013; Mayer & Monteiro, 2015).

Seja uma rede formada por duas partes: a parte-1 e a parte-2. Seja  $x_1(t)$  a atividade da parte-1 (isto é, o número total de neurônios ativos na parte-1) e seja  $x_2(t)$  a atividade da parte-2. Suponha que a parte-1 represente o núcleo geniculado lateral e a parte-2 represente o córtex visual, presentes num hemisfério do cérebro. Suponha ainda que a parte-1 seja estimulada por uma entrada de período  $P$ , sendo esse estímulo proveniente da retina. O modelo de Martins & Monteiro (2013) mostra que essas partes podem se sincronizar, como ilustra a figura 3.

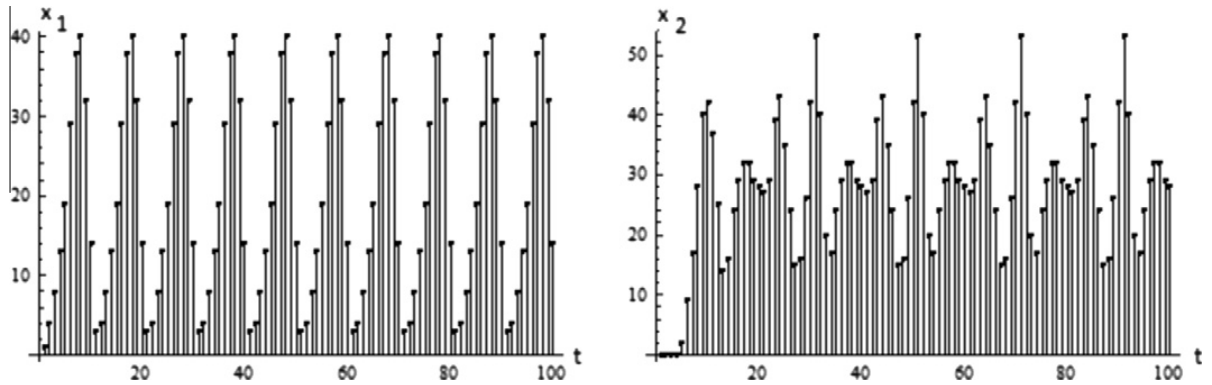


Figura 3: Evoluções temporais da atividade dos neurônios nas partes 1 e 2. Fonte: (Martins & Monteiro, 2013, p. 1789).

Nessa simulação com entrada periódica com período  $P = 5$ , a parte-1 oscila em regime permanente com período  $p_1$ , que é o dobro de  $P$ ; por sua vez, a parte-2 oscila com um período  $p_2$  que é o dobro de  $p_1$ . Assim,  $p_2 = 2p_1$ , com  $p_1 = 10$  e  $p_2 = 20$ . Esse modelo pode gerar resultados semelhantes aos observados em sistemas visuais de mamíferos (Castelo-Branco et al., 1998a; Ito et al., 2010).

No capítulo seguinte, apresentam-se os modelos usados neste trabalho. Esses modelos, tanto da rede quanto da dinâmica neuronal, se baseiam naqueles propostos por Martins (2011) e Martins & Monteiro (2013), que estudaram o sincronismo em via única. Aqui, investigam-se duas vias acopladas, cada qual formada por um reticulado que representa o núcleo geniculado lateral e por outro reticulado que representa o córtex visual. Assim, há quatro reticulados de Newman-Watts acoplados.

# Capítulo 3

## Os Modelos

Neste trabalho, emprega-se um modelo de rede neural baseado em autômatos celulares deterministas e grafos aleatórios. O objetivo é determinar como a conectividade do grafo afeta a dinâmica, a fim de identificar que propriedades topológicas levam a um comportamento similar ao observado nas vias visuais de mamíferos. Obviamente, nosso modelo é bastante simplista.

### 3.1. AUTÔMATO CELULAR

Autômatos celulares (AC) têm sido utilizados para reproduzir fenômenos biológicos (Kari, 2013; Wolfram, 2002). Um clássico exemplo é o *jogo da vida*, proposto por John Conway em 1970.

Autômato celular é um sistema dinâmico de estado, tempo e espaço discretos que consiste de uma rede de autômatos finitos que mudam seus estados em função do seu estado e dos estados de seus vizinhos, de acordo com uma regra de atualização local (Kari, 2013; Wolfram, 2002). Formalmente, define-se um AC pela quádrupla  $(\sigma, E, N, f)$ , sendo:

- (i)  $\sigma \in \mathbb{Z}^+$  a dimensão do reticulado;
- (ii)  $E$  o conjunto finito de estados;
- (iii)  $N$  o conjunto de células vizinhas;
- (iv)  $f : E^m \rightarrow E$  a regra local de atualização de estados.

sendo  $m$  o número de vizinhos de uma célula. Esses vizinhos formam o conjunto  $N$ . Num AC, tipicamente os estados de todas as células são atualizados simultaneamente, usando

a regra de atualização local. Com o passar do tempo, a configuração do AC se altera.

No nosso modelo,  $\sigma = 2$  (a rede é bidimensional),  $m \geq 4$  para os neurônios que não estão nas bordas, e  $E = \{r, s, y, z\}$ , sendo  $s$  o estado de repouso (susceptível a disparar, se o estímulo recebido supera ou iguala o limiar de disparo),  $y$  o estado ativo correspondente ao primeiro disparo,  $z$  o estado ativo correspondente ao segundo disparo, e  $r$  o estado inibido, no qual o neurônio não dispara, mesmo se suficientemente estimulado.

As regras de transição de estados de atividade de neurônios foram inspiradas nos trabalhos de Volk (2000) e Martins (2011). Nessa regras, apresentadas abaixo, tem-se à esquerda o estado no instante  $t$  e à direita o estado no instante  $t + 1$ :

$$\left\{ \begin{array}{ll} s \rightarrow y & \text{se a entrada supera ou iguala o limiar} \\ y \rightarrow z & \text{se a entrada supera ou iguala o limiar} \\ y \rightarrow s & \text{se a entrada não supera nem iguala o limiar} \\ z \rightarrow r & \\ r \rightarrow s & \end{array} \right.$$

A regra  $s \rightarrow y$  expressa a transição de um neurônio em repouso para o estado ativo, se o estímulo por ele recebido supera ou iguala limiar  $L$  de disparo. A regra  $y \rightarrow z$  indica que um neurônio que disparou uma vez pode disparar novamente, se continuar recebendo um estímulo suficiente. Caso contrário, ele retorna para o estado de repouso, de acordo com a regra  $y \rightarrow s$ . Um neurônio que disparou duas vezes consecutivas vai, obrigatoriamente, para o estado inibido, o que é representado pela regra  $z \rightarrow r$ . Finalmente, um neurônio inibido em  $t$  vai para o estado de repouso em  $t + 1$ , o que é expresso pela regra  $r \rightarrow s$ . Note que essas regras são deterministas. Supõe-se que um passo de tempo do autômato celular corresponda a um milissegundo de tempo real.

Como no trabalho de Martins (2011), inclui-se inibição por meio da quantidade de disparos consecutivos que um neurônio pode realizar (se suficientemente estimulado). Quanto maior for o número  $\delta$  de disparos consecutivos possíveis, menor é inibição. Aqui, usa-se  $\delta = 2$ . Além disso, toma-se o limiar  $L = 1$ . Assim, as transições  $s \rightarrow y$  e  $y \rightarrow z$  ocorrem se em  $t$  há ao menos um neurônio ativo na vizinhança de um neurônio no estado  $s$  ou  $y$ , respectivamente. Uma diferença do conjunto de regras empregado neste trabalho é a transição  $y \rightarrow s$ . Em Martins (2011), usou-se  $y \rightarrow r$ ; ou seja, o neurônio que disparou uma vez ia para o estado inibido, caso não fosse estimulado. Consideramos a nova regra mais adequada.

## 3.2. TOPOLOGIA DOS GRAFOS

Cada via visual (uma em cada hemisfério cerebral) é formada por dois subgrafos. Num hemisfério, esses subgrafos são denominados de parte-1 e parte-2; no outro hemisfério, de parte-3 e parte-4. Neurônios na primeira linha da parte-1 e da parte-3, que correspondem aos núcleos geniculados, recebem os estímulos periódicos (da retina). A parte-2 e a parte-4, que correspondem aos córtices visuais, estão acopladas entre si pelo corpo caloso.

Cada parte é um reticulado bidimensional composto de  $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$  neurônios. Assim, cada parte possui  $n$  neurônios. Aqui, usa-se  $n = 100$ . A figura 4 ilustra o modelo de rede neural usado neste trabalho, com as quatro partes ainda desconectadas.

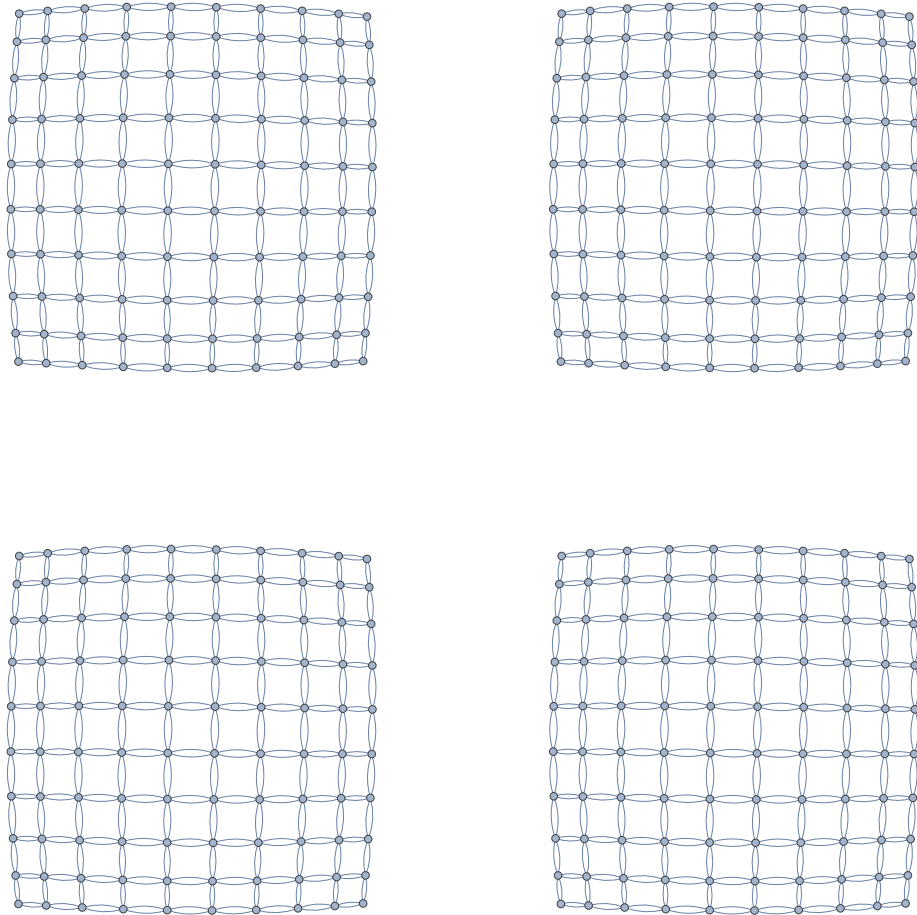


Figura 4: Os quatro subgrafos ainda desconectados.

Os neurônios de cada parte estão regularmente conectados aos seus quatro vizinhos mais próximos, que são aqueles a norte, a sul, a leste e a oeste (os neurônios das bordas possuem menos vizinhos). Em jargão de autômato celular, isso corresponde a

uma vizinhança de von Neumann de raio 1, conforme mostrado na figura 5. Se  $n = 100$ , então cada parte possui 180 conexões regulares. Na figura 6, o neurônio possui um vizinho aleatório adicional.

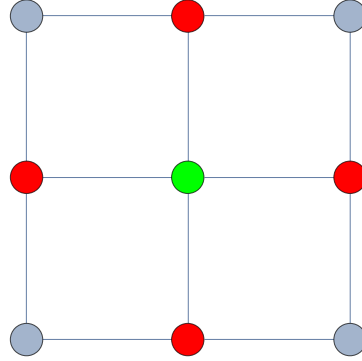


Figura 5: A vizinhança de von Neumann (em vermelho) de raio unitário do neurônio central (em verde).

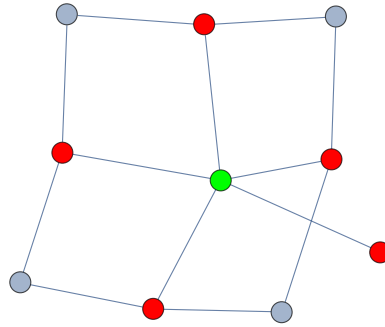


Figura 6: A vizinhança do neurônio da figura anterior com um vizinho aleatório extra.

Além das conexões regulares locais, há  $q$  conexões aleatórias adicionais em cada parte. As conexões intrapartes (realizadas entre neurônios de uma mesma parte), regulares ou aleatórias, são todas não direcionais.

As duas partes de uma mesma via se conectam por  $q'$  conexões aleatórias. Ou seja, há  $q'$  conexões entre as partes 1 e 2, e  $q'$  conexões entre as partes 3 e 4. O parâmetro  $\tau'$  determina o número de linhas de cada parte que podem receber essas conexões aleatórias. Essas linhas são contadas a partir da fronteira mais próxima da parte com a qual se conecta. Por exemplo, para  $\tau' = 2$ , as ligações aleatórias entre as partes 1 e 2 ocorrem entre as duas últimas linhas da parte-1 e as duas primeiras linhas da parte-2. As figuras 7 e 8 mostram exemplos de vias únicas. A diferença entre elas é o valor de  $\tau'$ . Quanto maior  $\tau'$ , maior é a região onde as conexões aleatórias entre as partes de uma mesma via podem ser estabelecidas.

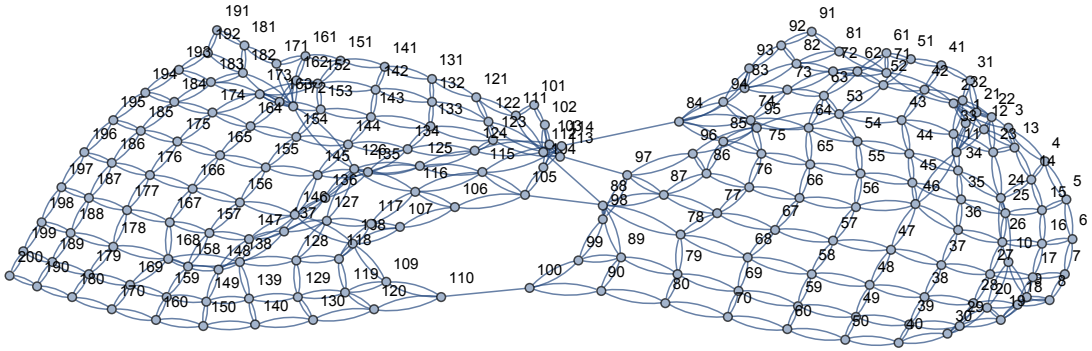


Figura 7: Rede representando uma via visual com  $n = 100$ ,  $q = q' = 5$  e  $\tau' = 2$ .

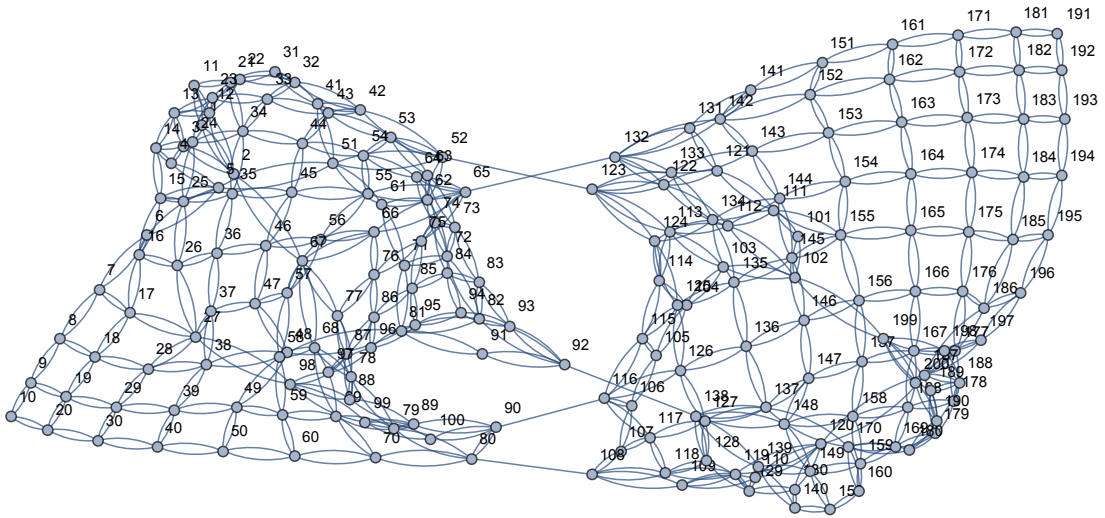


Figura 8: Rede representando uma via visual com  $n = 100$ ,  $q = q' = 5$  e  $\tau' = 5$ .

Ainda, as duas vias se conectam por  $q''$  conexões aleatórias, que são estabelecidas entre as partes 2 e 4. O parâmetro  $\tau''$  define o número de colunas de cada parte que podem receber essas conexões aleatórias.

A adição de  $2q$  conexões aleatórias intrapartes e de  $2q' + q''$  conexões entre partes torna nosso modelo similar a redes do tipo mundo pequeno, que parece ser a topologia típica de redes neurais biológicas (Sporns & Zwi, 2004; Sporns, 2011; Yu et al., 2008).

Uma rede que representa as duas vias acopladas é mostrada na figura 9. Nessa rede, cada parte possui  $n = 100$  neurônios, com  $q = q' = 9$  (assim, há 27 conexões aleatórias em cada hemisfério) e  $\tau' = 10$ . Portanto, as conexões aleatórias entre as partes de uma mesma via podem se dar entre qualquer par de neurônios (desde que cada um esteja numa parte distinta). Além disso,  $q'' = 9$  e  $\tau'' = 10$ ; ou seja, as partes 2 e 4 são conectadas por 9 conexões aleatórias, que podem ser formadas entre qualquer par de neurônios (desde que cada um esteja numa das partes).

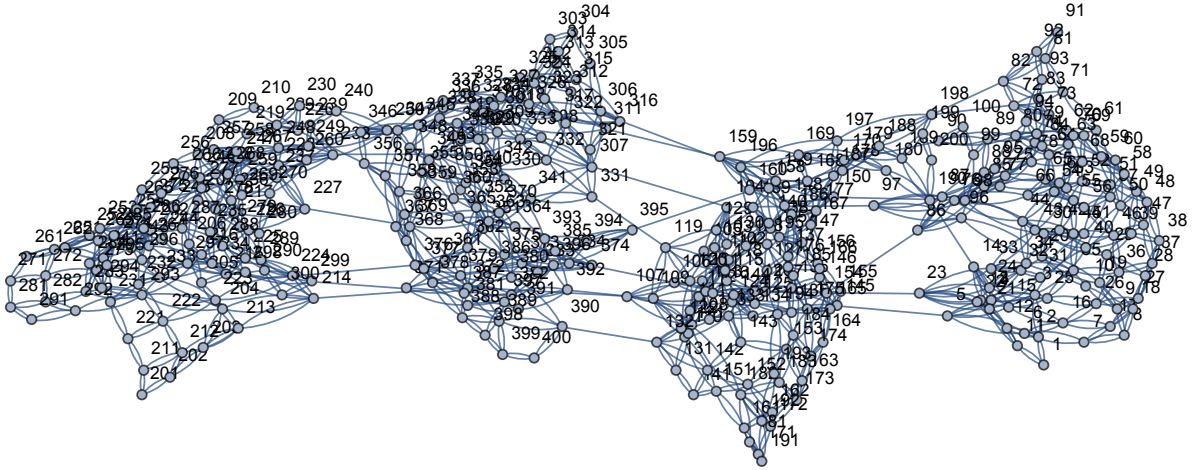


Figura 9: Grafo representando duas vias acopladas com  $q = q' = q'' = 9$  e  $\tau' = \tau'' = 10$ . No total, há 400 neurônios e  $4 \times 9 + 2 \times 9 + 9 = 63$  conexões aleatórias e  $180 \times 4 = 720$  conexões regulares.

As simulações computacionais consistem em: criar redes como descrito, estimular a rede com uma entrada periódica de período  $P$ , e atualizar os estados dos neurônios, conforme as regras de transição de estados do autômato celular. Então, analisam-se os resultados, determinando o período de oscilação das partes, a fim de verificar se elas se sincronizam ou não. Dois tipos de estímulos e diversos tipos de conectividade foram simulados, como relatado no próximo capítulo.

Adicionar arestas aleatórias certamente diminui o menor caminho médio  $\ell$  da rede. Para ilustrar esse fato, considere um reticulado regular  $10 \times 10$ , com vizinhança de von Neumann de raio unitário, em que  $q$  arestas aleatórias são incluídas. Os valores de  $\ell$  mostrados na tabela 1 correspondem às medias encontradas considerando 10 redes criadas para cada valor de  $q$ . Observe que, para  $q = 81$ , o valor de  $\ell$  é menor do que a metade daquele correspondente a  $q = 0$ .

Tabela 1: Tabela com resultados médios de  $\ell$  em função de  $q$ .

$q$	$\ell$
0	$6,67 \pm 0$
3	$5,81 \pm 0,17$
9	$4,95 \pm 0,13$
27	$3,99 \pm 0,10$
81	$3,14 \pm 0,03$



### 3.3. ATIVIDADE DOS NEURÔNIOS

Seja  $x_i(t)$  a quantidade de neurônios ativos (ou seja, o número de neurônios que estão disparando pela primeira ou pela segunda vez) na parte- $i$  no instante  $t$ . Nas figuras 10, 11 e 12, mostram-se exemplos da evolução temporal de  $x(t) = \sum_{i=1}^4 \frac{x_i(t)}{n}$ , sendo  $x(t)$  a soma dos neurônios ativos das quatro partes que formam a rede dividida pelo número total de neurônios. Assim,  $x(t)$  expressa o nível de atividade normalizado da rede. O período da excitação vale  $P = 10$ .

Nas figuras 10 e 11,  $x(t)$  tende a oscilar no mesmo período da entrada, mas, na figura 11, a amplitude da oscilação é bem menor, de modo que o sistema parece atingir, no regime permanente, uma solução estacionária. Na figura 12, a atividade oscila de maneira aperiódica e limitada, que lembra comportamento caótico. Essas figuras são melhor exploradas no capítulo 5 desta dissertação.

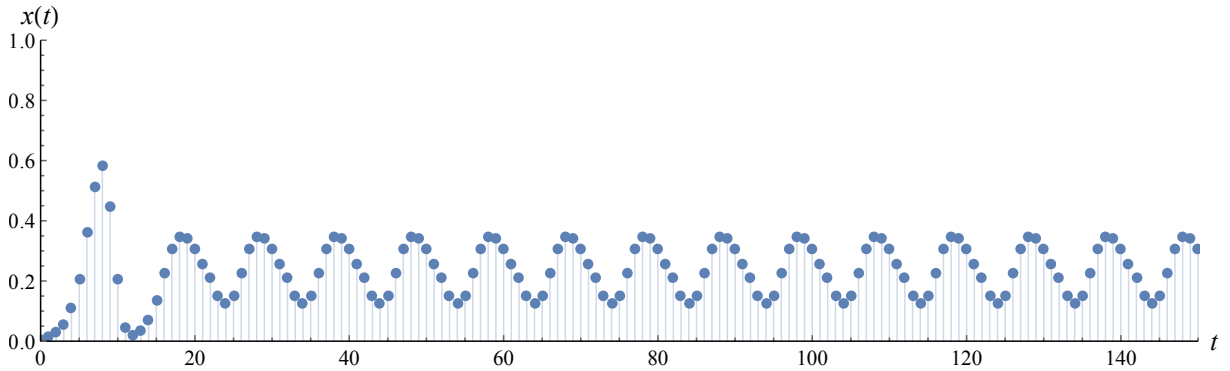


Figura 10: Atividade normalizada de uma rede com  $n = 100$ ,  $P = 10$ ,  $q = q' = q'' = 27$  e  $\tau' = \tau'' = 10$ .

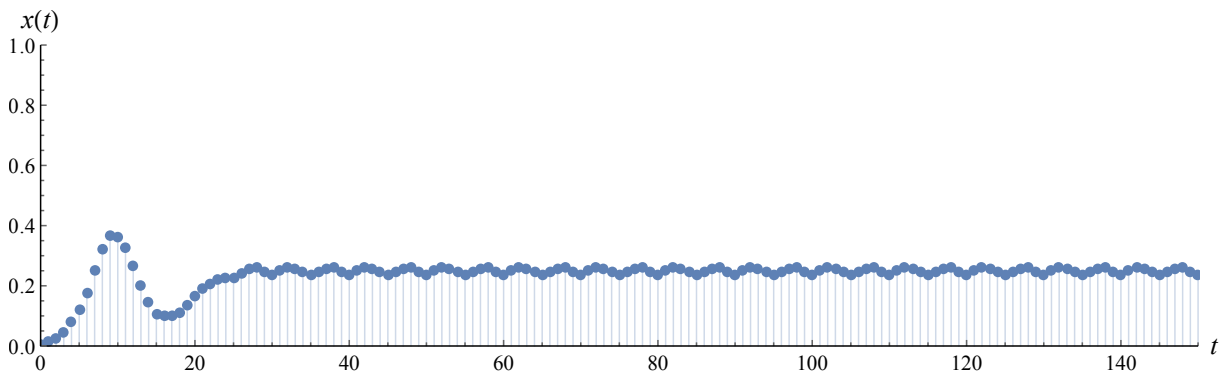


Figura 11: Atividade normalizada de uma rede com  $n = 100$ ,  $P = 10$ ,  $q = q' = q'' = 3$  e  $\tau' = \tau'' = 10$ .

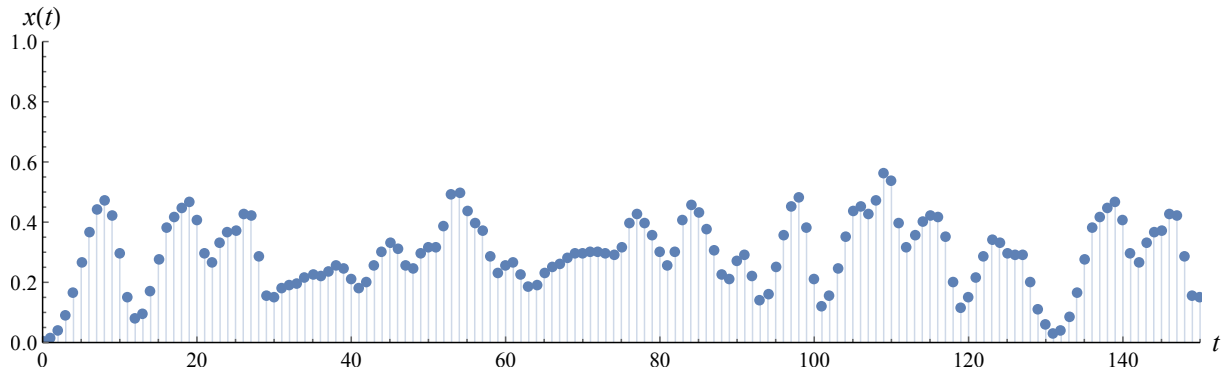


Figura 12: Atividade normalizada de uma rede com  $n = 100$ ,  $P = 10$ ,  $q = 9$ ,  $q' = q'' = 3$  e  $\tau' = \tau'' = 10$ .

No próximo capítulo, apresentam-se os resultados obtidos nas simulações computacionais realizadas. Apesar de extremamente simplista, nosso modelo se baseia em duas propriedades típicas de redes neurais, que são: um neurônio está, em cada instante, em um de dois estados (ou seja, a variável que representa sua dinâmica é binária) e os neurônios estão conectados por uma topologia do tipo mundo-pequeno.

# Capítulo 4

## Resultados

Nas simulações, o estímulo periódico representa impulsos elétricos oriundos da retina, que estimulam os núcleos geniculados laterais (partes 1 e 3), que estimulam os córtices visuais (partes 2 e 4). Os estados de todos os neurônios são atualizados de forma simultânea (assim, o estado da rede em  $t$  determina o estado da rede em  $t + 1$ ). Neste capítulo, são mostrados os resultados, organizados em forma de tabelas, que, a nosso ver, mais contribuem para o entendimento das conclusões. Outras tabelas, com dados brutos, encontram-se no apêndice. O total de simulações é 512000, sendo 128000 para o grupo 1 (via única) e 384000 para o grupo 2 (via dupla).

Em todas as simulações, considerou-se que  $\tau' = \tau'' = 10$  (assim, as ligações aleatórias entre as partes 1 e 2, entre as partes 3 e 4, e entre as partes 2 e 4 podem se dar entre qualquer par de neurônios, desde que cada neurônio esteja localizado em uma parte diferente) e estímulo com período  $P = 10$  (pois se um passo de tempo do AC corresponde a um milissegundo, então esse período equivale a uma frequência de 100 Hz, que é um valor típico dos disparos da retina). O objetivo é tentar determinar como os valores de  $q$ ,  $q'$  e  $q''$  (as quantidades de ligações aleatórias intrapartes, entre as partes de uma mesma via e entre as partes que representam os córtices, respectivamente) afetam a ocorrência de sincronismo nas proporções 1 : 1, 1 : 2 ou 1 : 3 entre núcleo geniculado e córtex, como já mencionado.

As simulações estão organizadas em dois grupos:

1. via única, com duas partes acopladas;
2. duas vias, com quatro partes acopladas por ligações inter-hemisféricas.

Cada simulação compreende 100 passos de tempo, o que é, em geral, suficiente, para o sistema atingir sua dinâmica em regime permanente. Além disso, a intenção é determinar que configurações da rede favorecem o sincronismo ocorrer rapidamente; isto é, na janela de tempo considerada (que equivale a 100 milissegundos de tempo real).

No grupo 1, foram simulados dois tipos de estímulos: 1) estímulo aplicado a um único neurônio da primeira linha da parte 1 e 2) estímulo aplicado simultaneamente aos dez neurônios da primeira linha dessa parte. Para cada combinação de  $q$  e  $q'$  escolhida, procedeu-se assim. Para estímulo em um neurônio da parte 1, foram criadas 1000 redes aleatórias. Como há dez neurônios na primeira linha da parte-1, então há 10 entrada possíveis, totalizando 10000 simulações. Para estímulo simultâneo nos dez neurônios que constituem a primeira linha da parte 1, foram geradas 10000 redes, a fim de ter o mesmo número de simulações do primeiro tipo de estímulo. Essas simulações de via única foram feitas para: 1) validar a implementação do algoritmo, uma vez que parte delas pode ser comparada com o trabalho de Martins (2011); 2) testar novas formas de acoplamento entre as partes 1 e 2 e um novo tipo de estímulo; a saber, aquele que é aplicado ao mesmo tempo a dez neurônios.

No grupo 2, foram investigados dois tipos de estímulos: 1) estímulo aplicado simultaneamente a um neurônio da primeira linha da parte 1 e um neurônio da primeira linha da parte 3 e 2) estímulo aplicado simultaneamente aos dez neurônios da primeira linha dessas duas partes. Para cada combinação de  $q$ ,  $q'$  e  $q''$  escolhida, procedeu-se assim. Para estímulo em um neurônio da parte 1 e em um neurônio da parte 3, foram criadas 100 redes aleatórias. Como há dez neurônios na primeira linha da parte-1 e dez neurônios na primeira linha da parte-3, então há 100 combinações de entradas possíveis, totalizando 10000 simulações. Para estímulo simultâneo nos dez neurônios que formam a primeira linha das partes 1 e 3, foram geradas 10000 redes, a fim de ter o mesmo número de resultados do primeiro tipo de estímulo.

Nas tabelas que expressam os resultados das simulações com via única, adotou-se a seguinte notação. Seja  $p_i$  o período de oscilação em regime permanente da parte- $i$ . Nessas tabelas,  $N_1$  indica o número de casos em que  $p_1 = p_2 = 10$  e  $N_2$  o número de casos em que  $p_1 = 10$  e  $p_2 = 20 \vee 30$ . Ou seja,  $N_1$  indica o número de vezes em que as duas partes estão oscilando no mesmo período da entrada, e  $N_2$  indica o número de vezes em que o período da parte 2 é o dobro ou o triplo do período da parte 1, que é o mesmo do estímulo. Lembre que, tipicamente, o córtex (a parte 2) oscila com uma frequência que é igual ou da ordem da metade a um terço da frequência encontrada no núcleo geniculado (a

parte 1) e na retina (o estímulo externo). Para via dupla,  $N_1$  representa o número de casos em que  $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 10$  e  $N_2$  os casos em que  $p_1 = p_3 = 10$  e  $p_2 = p_4 = 20 \vee 30$ . Já  $NS$  indica ausência de sincronismo; ou seja, ao menos uma das partes não oscila de forma periódica na janela de tempo considerada.

## 4.1. GRUPO 1

As ligações entre as partes 1 e 2 podem ser direcionadas ou não. Aqui,  $f'$  denota a fração das  $q'$  ligações aleatórias que se originam na parte 1 e chegam à parte 2 e  $1 - f'$  denota a fração das ligações aleatórias com orientação contrária. Assim, para  $f' = 1$ , todas as  $q'$  ligações são direcionadas de 1 para 2; para  $f' = 2/3$ , então  $2/3$  das ligações são de 1 para 2 e  $1/3$  são de 2 para 1. Como o estímulo é aplicado na parte 1, então, se  $f' = 0$ , a parte 2 ficaria sem atividade; por isso, esse caso não foi simulado. Ainda, as ligações entre as partes 1 e 2 podem ser não direcionadas. Esse caso é representado por  $f' = bi$  (de bidirecional).

Realizaram-se simulações considerando  $q = 3, 9, 27, 81$ ,  $q' = 3, 9, 27, 81$  e  $f' = 1, 2/3, 1/3, bi$ .

As tabelas 2-5 mostram os resultados com estímulo de período 10 aplicado a um único neurônio na primeira linha da parte 1. O valor máximo da soma dos números de cada coluna é 1000.

Tabela 2: Tabela com os resultados do grupo 1 para  $f' = 1$ .

$q$	3	3	3	3	9	9	9	9	27	27	27	27	81	81	81	81
$q'$	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81
$N_1$	106	79	130	90	374	256	326	370	912	707	494	920	997	986	798	733
$N_2$	4	48	6	5	20	164	90	2	20	215	440	16	3	14	202	253
$NS$	0	8	25	54	0	6	18	42	0	1	2	2	0	0	0	0

Tabela 3: Tabela com os resultados do grupo 1 para  $f' = 2/3$ .

$q$	3	3	3	3	9	9	9	9	27	27	27	27	81	81	81	81
$q'$	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81
$N_1$	208	87	48	0	461	112	40	0	453	134	107	0	185	164	113	7
$N_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$NS$	337	458	246	0	195	335	230	1	156	196	203	0	126	89	130	0

Tabela 4: Tabela com os resultados do grupo 1 para  $f' = 1/3$ .

$q$	3	3	3	3	9	9	9	9	27	27	27	27	81	81	81	81
$q'$	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81
$N_1$	182	64	44	0	462	112	47	0	422	72	92	0	111	123	29	0
$N_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$NS$	458	455	209	0	261	342	230	0	190	246	199	1	155	87	192	0

Tabela 5: Tabela com os resultados do grupo 1 para  $f' = bi$ .

$q$	3	3	3	3	9	9	9	9	27	27	27	27	81	81	81	81
$q'$	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81
$N_1$	146	171	543	975	403	513	740	995	933	931	980	1000	1000	1000	1000	1000
$N_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$NS$	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

As tabelas 6–9 exibem os resultados com estímulo de período 10 aplicado simultaneamente aos 10 neurônios da primeira linha da parte 1. O valor máximo da soma dos números de cada coluna é 1000.

Tabela 6: Tabela com os resultados do grupo 1 para  $f' = 1$ .

$q$	3	3	3	3	9	9	9	9	27	27	27	27	81	81	81	81
$q'$	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81
$N_1$	966	780	869	979	994	787	762	999	995	902	572	923	999	992	873	683
$N_2$	1	149	102	0	5	165	226	1	5	95	424	69	1	8	127	314
$NS$	0	4	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 7: Tabela com os resultados do grupo 1 para  $f' = 2/3$ .

$q$	3	3	3	3	9	9	9	9	27	27	27	27	81	81	81	81
$q'$	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81
$N_1$	734	112	17	0	682	95	27	0	449	96	62	0	125	93	110	2
$N_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$NS$	175	542	333	4	203	493	314	4	258	412	237	5	244	247	181	4

Tabela 8: Tabela com os resultados do grupo 1 para  $f' = 1/3$ .

$q$	3	3	3	3	9	9	9	9	27	27	27	27	81	81	81	81
$q'$	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81
$N_1$	584	44	26	0	580	30	46	0	331	42	73	0	46	52	55	0
$N_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$NS$	280	527	265	2	281	478	215	4	365	405	193	4	260	193	218	0

Tabela 9: Tabela com os resultados do grupo 1 para  $f' = bi$ .

$q$	3	3	3	3	9	9	9	9	27	27	27	27	81	81	81	81
$q'$	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81
$N_1$	985	997	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
$N_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$NS$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

#### 4.1.1. COMENTÁRIOS

Considerando estímulo único, nota-se que sincronismo com  $p_1 = 10$  e  $p_2 = 20 \vee 30$  ocorre apenas quando todas as ligações aleatórias entre as partes são direcionadas de 1 para 2. Ou seja, tem-se  $N_2 \neq 0$  apenas para  $f' = 1$ . Um resultado interessante é que  $N_2$  tende a ser maior quando o parâmetro  $q'$  possui valores próximos de  $q$ .

Um aumento significativo no assincronismo é observado quando  $f' = 1/3$  ou  $2/3$ , comparando-se com o caso  $f' = 1$ . Assim, quando há uma fração não nula de ligações da parte 2 para a parte 1, há mais casos com ausência de sincronismo.

Quando  $f' = 1$  ou  $f' = bi$ , mais neurônios tendem a se sincronizar com o período da entrada, conforme se aumenta a quantidade de ligações aleatórias (ou seja, conforme se aumenta  $q$  e/ou  $q'$ ). Assim, quando  $f' = 1$  ou  $f' = bi$  e há “muitas” ligações aleatórias, as duas partes tendem a se comportar como se fossem uma só e acabam oscilando no mesmo período da entrada.

Resultados semelhantes foram observados com estímulo simultâneo em dez neurônios. Entretanto, obteve-se um valor ligeiramente maior de  $N_2$ , já que a soma dos valores de  $N_2$  na tabela 6 vale 1692; na tabela 2, vale 1502.

Em todas essas tabelas, sempre se encontra  $N_1 > N_2$ ; assim, o sincronismo na proporção 1 : 1 é mais frequente do que aquele na proporção 1 : 2 ou 1 : 3. O valor máximo de  $N_2$ , para ambos os estímulos considerados, se deu em  $q = q' = 27$  (tabelas 2 e 6). O valor máximo de  $N_1$  ocorre para  $f' = bi$  e praticamente para quaisquer valores de  $q$  e  $q'$  para estímulo em 10 neurônios, e para  $(q, q') = (27, 81)$  ou  $q = 81$  e qualquer valor de  $q'$  para estímulo único.

Em resumo, para se ter maior valor de  $N_2$  é necessário que  $f' = 1$  (todas as ligações são direcionadas da parte 1 para a parte 2) e  $q \sim q'$  e o estímulo aplicado a todos os neurônios que servem de entrada. Para se ter maior valor de  $N_1$ , basta ter estímulo simultâneo ou, então, estímulo único e  $q$  “grande”.

Um gráfico de atividade em via única é mostrado na figura 13.

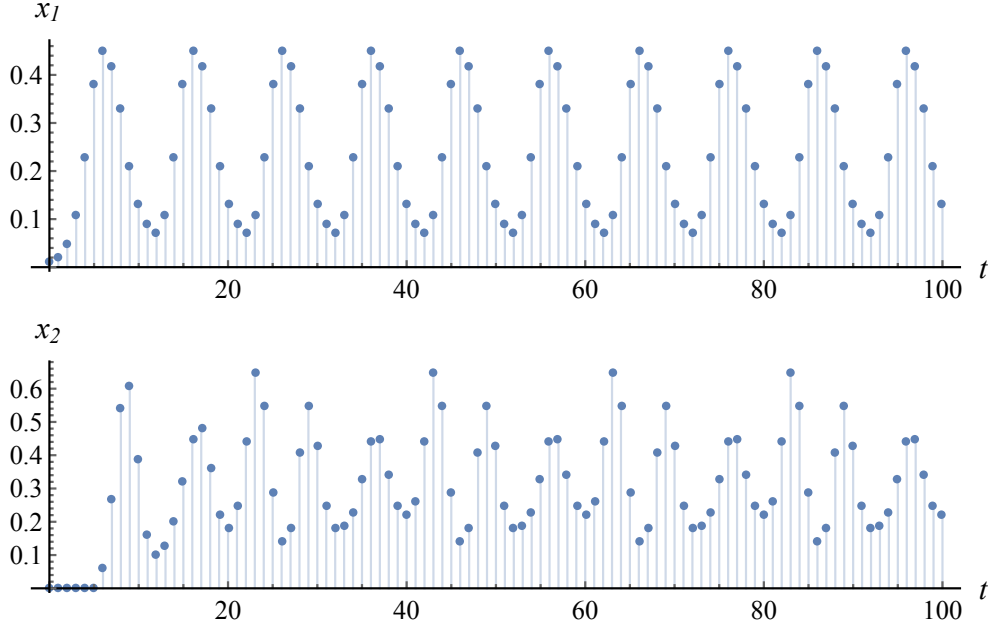


Figura 13: Sincronismo com períodos  $p_2 = 2p_1 = 20$  em via única para  $P = 10$ ,  $q = q' = 9$  e  $f' = 1$ .

## 4.2. GRUPO 2

Nesse grupo de simulações, foram usados  $P = 10$  e  $\tau' = \tau'' = 10$  como parâmetros. Cada uma das quatro parte é formada por 100 neurônios. Baseado nas simulações do grupo 1, assumiu-se que todas as ligações entre as partes de um mesmo hemisfério vão da parte-1 (da parte-3) e para a parte-2 (para a parte-4), a fim de possibilitar a ocorrência de sincronismo em períodos diferentes.

As ligações entre os hemisférios, controladas pelo parâmetro  $q''$ , se dão entre as partes 2 e 4. O parâmetro  $f$  expressa a fração das  $q''$  ligações que se iniciam na parte-2 e terminam na parte-4.

Como já mencionado, foram considerados dois tipos de estímulos: estímulo aplicado a um neurônio da primeira linha da parte-1 e um da primeira linha da parte-3 e estímulo aplicado aos dez neurônios de primeira linha de cada uma dessas partes.



Realizaram-se simulações considerando  $q = 3, 9, 27, 81$ ,  $q' = 3, 9, 27, 81$ ,  $q'' = 3, 9, 27, 81$  e  $f = 1, 1/3, bi$ . Por uma questão de simetria,  $f = 1/3$  equivale a  $f = 2/3$ ; por isso, esse último caso não foi simulado.

As tabelas 10-21, provenientes de tabelas que se encontram no apêndice, apresentam os resultados de forma resumida. Elas contêm os resultados de simulações somando-se as quantidades de  $N_1$ ,  $N_2$  e  $NS$  para os diferentes valores de  $q'$  e de  $q''$  considerados. O valor máximo da soma de cada coluna é 40000.

As tabelas 10-15 se referem aos resultados com estímulo em um neurônio da parte-1 e um da parte-3. Nas tabelas 10-12, somaram-se os resultados obtidos para os quatro valores de  $q''$  considerados.

Tabela 10: Tabela com somas em  $q''$  para  $f = 1$ .

$q$	3	3	3	3	9	9	9	9	27	27	27	27	81	81	81	81
$q'$	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81
$N_1$	258	189	308	214	4655	2758	4080	3842	23662	19523	14379	22719	28437	28256	23811	23616
$N_2$	7	97	26	3	202	1498	987	40	521	4873	11254	434	129	1053	6650	8958
$NS$	4477	4041	5440	7524	1252	3182	5331	6692	47	437	1906	2461	0	3	54	629

Tabela 11: Tabela com somas em  $q''$  para  $f = 1/3$ .

$q$	3	3	3	3	9	9	9	9	27	27	27	27	81	81	81	81
$q'$	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81
$N_1$	165	142	188	172	1737	1988	3257	2688	9867	10967	13489	17541	12363	16209	16135	18444
$N_2$	43	88	9	26	873	873	249	379	6038	5394	2630	1149	5761	3384	2893	1718
$NS$	8519	6145	6238	7966	5288	5446	5865	9011	1974	2029	2178	2460	1309	988	673	1086

Tabela 12: Tabela com somas em  $q''$  para  $f = bi$ .

$q$	3	3	3	3	9	9	9	9	27	27	27	27	81	81	81	81
$q'$	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81
$N_1$	290	195	468	253	5659	3417	6606	5626	32570	21761	23806	34460	39746	37382	27939	34802
$N_2$	74	211	1	25	1110	3856	147	98	1979	11996	10079	29	254	2618	12014	4842
$NS$	2391	1272	1607	4888	345	816	1591	4677	8	58	114	190	0	0	0	0

Nas tabelas 13-15, somaram-se os resultados obtidos para os quatro valores de  $q'$  considerados.

Tabela 13: Tabela com somas em  $q'$  para  $f = 1$ .

$q$	3	3	3	3	9	9	9	9	27	27	27	27	81	81	81	81
$q''$	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81
$N_1$	243	347	309	70	4804	4365	4149	2017	22670	21132	20109	16372	27234	24794	25667	26425
$N_2$	46	29	57	1	789	914	784	240	4821	4468	4976	2817	4263	4211	4182	4134
$NS$	2788	4487	6787	7420	1924	3031	4767	6735	225	340	1619	2667	4	6	115	561

Tabela 14: Tabela com somas em  $q'$  para  $f = 1/3$ .

$q$	3	3	3	3	9	9	9	9	27	27	27	27	81	81	81	81
$q''$	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81
$N_1$	297	299	71	0	4317	4046	1306	1	23132	20856	7826	50	27880	28146	6862	263
$N_2$	70	70	26	0	997	834	543	0	7706	5421	2080	4	7499	3410	2804	43
$NS$	10135	11523	7204	6	7033	10553	8017	7	1137	2499	5002	3	103	591	3361	1

Tabela 15: Tabela com somas em  $q'$  para  $f = bi$ .

$q$	3	3	3	3	9	9	9	9	27	27	27	27	81	81	81	81
$q''$	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81
$N_1$	273	427	314	192	5324	5804	5468	4712	28198	28868	27811	27720	35454	34744	34919	34752
$N_2$	50	66	99	96	1013	1084	1461	1653	5733	5995	6290	6065	4499	5154	4986	5089
$NS$	2264	2675	2457	2762	1374	1663	2015	2377	42	97	103	128	0	0	0	0

As tabelas 16-21 se referem aos resultados com estímulo em dez neurônios da parte-1 e dez da parte-3. Nas tabelas 16-18, somaram-se os resultados obtidos para os quatro valores de  $q''$  escolhidos.

Tabela 16: Tabela com somas em  $q''$  para  $f = 1$ .

$q$	3	3	3	3	9	9	9	9	27	27	27	27	81	81	81	81
$q'$	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81
$N_1$	32892	23883	24843	26256	32111	24240	22274	27803	29161	26398	17336	26650	29976	30276	26343	21453
$N_2$	106	4210	3106	4	172	5135	7325	42	239	3516	13265	2540	55	570	4645	11384
$NS$	90	1599	2333	2285	61	1060	1991	1905	15	265	1132	1645	1	10	49	271

Tabela 17: Tabela com somas em  $q''$  para  $f = 1/3$ .

$q$	3	3	3	3	9	9	9	9	27	27	27	27	81	81	81	81
$q'$	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81
$N_1$	11285	11862	19966	21036	11340	11955	19776	22779	10725	12516	14882	21630	12405	15984	16541	18434
$N_2$	3862	4576	995	797	5143	5641	1573	876	6682	5824	4018	1040	5289	3100	2975	2634
$NS$	3565	2670	1257	2012	2866	2094	1235	1542	1819	1419	1527	1414	1533	988	880	951

Tabela 18: Tabela com somas em  $q''$  para  $f = bi$ .

$q$	3	3	3	3	9	9	9	9	27	27	27	27	81	81	81	81
$q'$	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81
$N_1$	34924	19715	37735	3821437477	22347	36818	3998939054	31345	23732	3982939886	38729	31216	31200			
$N_2$	2078	14438	417	14	1846	15174	2967	4	860	8525	16073	148	114	1271	8779	8741
$NS$	1	83	3	5	0	10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Nas tabelas 19-21, somaram-se os resultados obtidos para os quatro valores de  $q''$  escolhidos.

Tabela 19: Tabela com somas em  $q'$  para  $f = 1$ .

$q$	3	3	3	3	9	9	9	9	27	27	27	27	81	81	81	81
$q''$	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81
$N_1$	32228	30119	30825	1470231158	28211	29948	1711126631	24507	26779	2162828038	24934	26383	28693			
$N_2$	2320	2246	2223	637	3846	3734	3741	1353	5393	4849	5646	3672	3940	4084	4245	4385
$NS$	63	127	1124	4993	58	106	1026	3827	13	24	644	2376	0	0	58	273

Tabela 20: Tabela com somas em  $q'$  para  $f = 1/3$ .

$q$	3	3	3	3	9	9	9	9	27	27	27	27	81	81	81	81
$q''$	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81
$N_1$	30529	24887	8712	21	30625	25286	9891	48	26742	23676	9287	48	28021	27672	7282	389
$N_2$	3874	4267	2084	5	5426	5682	2116	9	8618	6862	2073	11	7534	3812	2598	54
$NS$	1277	3377	4841	9	832	2555	4349	1	455	1749	3975	0	111	916	3324	1

Tabela 21: Tabela com somas em  $q'$  para  $f = bi$ .

$q$	3	3	3	3	9	9	9	9	27	27	27	27	81	81	81	81
$q''$	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81
$N_1$	34599	33507	32319	3016335303	34842	33888	3259833660	33534	33356	3341035126	35107	35195	35603			
$N_2$	2489	3125	4619	6714	3831	4199	5223	6738	6253	6350	6540	6463	4867	4878	4788	4372
$NS$	37	32	13	10	3	5	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0

## 4.2.1. COMENTÁRIOS

Considere as simulações com estímulo em um neurônio de cada via. Observando as tabelas 10-11 e 13-14, com ligações direcionadas entre os hemisférios, nota-se que aumentar  $q$  tende a aumentar as quantidades de  $N_1$  e  $N_2$ . Nas tabelas 13 e 14, verifica-se que aumentos em  $q''$  tendem a diminuir essas quantidades, pois tais aumentos implicam maior interferência unidirecional de uma via sobre a outra. Já variações em  $q'$  tendem a não afetar muito  $N_1$ , mas afetam sensivelmente  $N_2$ , como sugerem as tabelas 10-11.

Nas tabelas 12 e 15, com ligações não direcionadas entre os hemisférios, aumentar  $q$  tende a levar a aumentos em  $N_1$  e  $N_2$ . De acordo com a tabela 15, a influência de  $q''$  é menos nítida sobre os valores de  $N_1$  e  $N_2$ ; já a influência de  $q'$  é notória sobre  $N_2$  e menos clara sobre  $N_1$ , como mostra a tabela 12.

Agora, considere as tabelas referentes a estímulo em dez neurônios de cada via. Comparando as tabelas 16-21 com as tabelas 10-15, nota-se que as tabelas 16-21 apresentam valores mais elevados de  $N_1$  e  $N_2$ , independentemente da combinação de  $q$ ,  $q'$  e  $q''$ . Por exemplo, para  $f = bi$ , o número total de casos de sincronismo 1 : 2 e 1 : 3 é 49333 para estímulo em um neurônio de cada via e 81449 para estímulo em dez neurônios de cada via. Já o número de casos 1 : 1 é 274980 para estímulo único e 542201 para estímulo em dez neurônios.

Observando as tabelas 16-17 e 19-20, com ligações direcionadas entre os hemisférios, percebe-se que aumentar  $q$  não causa grande variação em  $N_1$  e tende a aumentar  $N_2$ . Nessas tabelas, nota-se que a maior quantidade de  $N_2$  tende a ocorrer com  $q'$  e  $q''$  pequenos ou intermediários.

Nas tabelas 18 e 21, com ligações não direcionadas entre os hemisférios, nota-se que variar  $q$  não afeta muito  $N_1$ , mas afeta  $N_2$ . Aumentos em  $q''$  tendem a aumentar  $N_2$ , mas esse efeito satura para  $q$  grande. A variação com  $q'$  é mais crítica, havendo um valor de  $q'$ , em geral intermediário, que maximiza  $N_2$ .

Em todas essas tabelas, sempre se encontra  $N_1 > N_2$ ; exceto para estímulo em um neurônio de cada parte, com  $q = q' = 9$  e  $f = bi$  (tabela 12). De acordo com as tabelas 10-21, em termos de somas em  $q'$  e em  $q''$ , os valores máximos de  $N_2$  ocorrem em  $q = q' = 27$  e  $q = q' = 9$ ,  $f = bi$  e estímulo aplicado à toda a primeira linha da primeira parte de cada via (tabela 18). Na tabela 21, note que, para  $q = 27$ , o valor de  $q''$  pouco afeta  $N_2$ , já para  $q = 9$ , maiores valores de  $q''$  levam a maiores valores de  $N_2$ . Os maiores valores de  $N_1$  foram obtidos para  $f = bi$ , estímulo em 10 neurônios de cada via,  $(q, q') = (9, 81), (27, 81), (81, 3)$  (tabela 18). Na tabela 21, observe que  $N_1$  não é muito sensível a variações em  $q''$ .

Em resumo, para se ter maiores valores de  $N_1$  e  $N_2$ , é necessário que  $f = bi$  (as ligações entre os hemisférios são não direcionadas) e o estímulo deve ser aplicado aos dez neurônios que servem de entrada em cada via. Para maiores valores de  $N_2$ , deve-se tomar valores intermediários de  $q$  e  $q'$ ; com isso, o valor de  $q''$  não é tão relevante. Para maiores valores de  $N_1$ , deve-se tomar  $q$  intermediário e  $q'$  grande; ou  $q$  grande e  $q'$  pequeno.

As figuras 14-16 ilustram as atividades de cada parte da rede, representadas pelas variáveis  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  e  $x_4(t)$ . A figura 14 mostra uma evolução temporal pertencente a  $N_1$ ; a figura 15, a  $N_2$ ; e a figura 16, a  $NS$ .

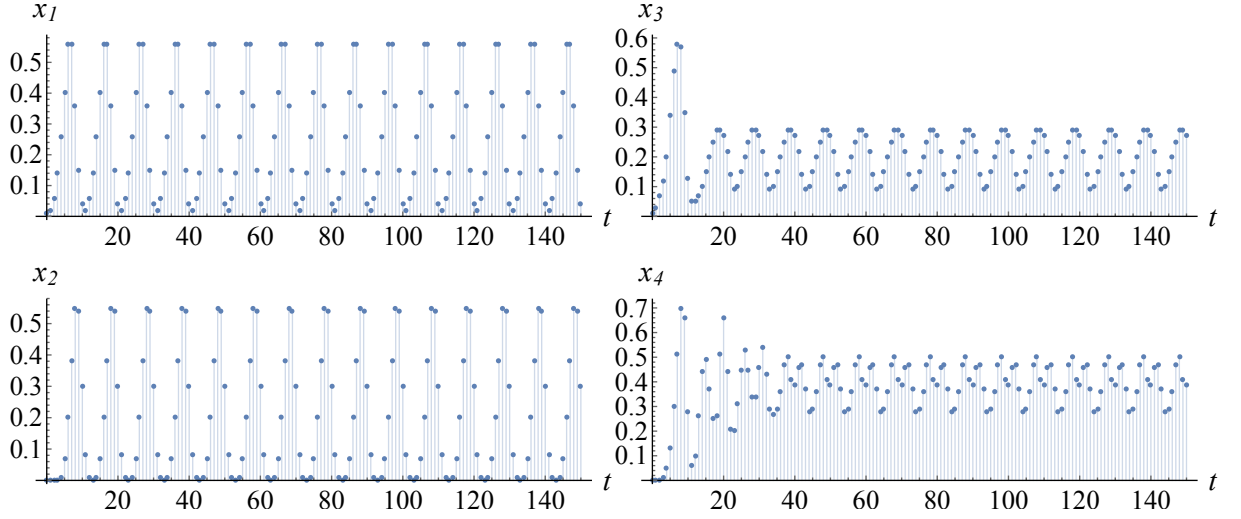


Figura 14: Atividades numa rede com  $q = q' = 9$ ,  $q'' = 27$ , e  $\tau' = \tau'' = 10$ . As quatro parte oscilam com período 10 em regime permanente.

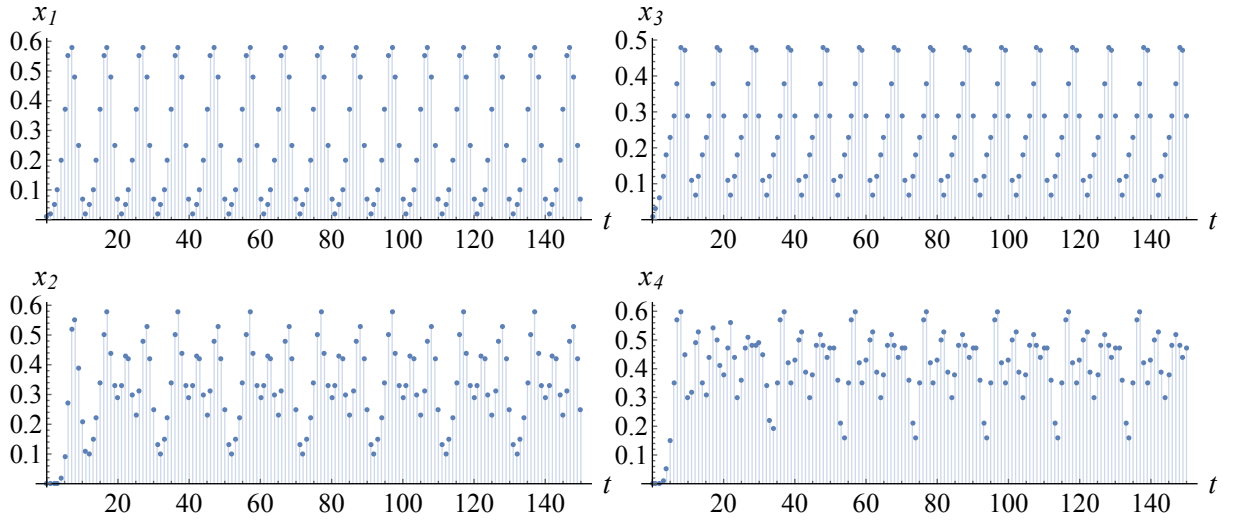


Figura 15: Atividades numa rede com  $q = 9$ ,  $q' = q'' = 27$ , e  $\tau' = \tau'' = 10$ . Aqui,  $p_1 = p_3 = 10$  e  $p_2 = p_4 = 20$ .

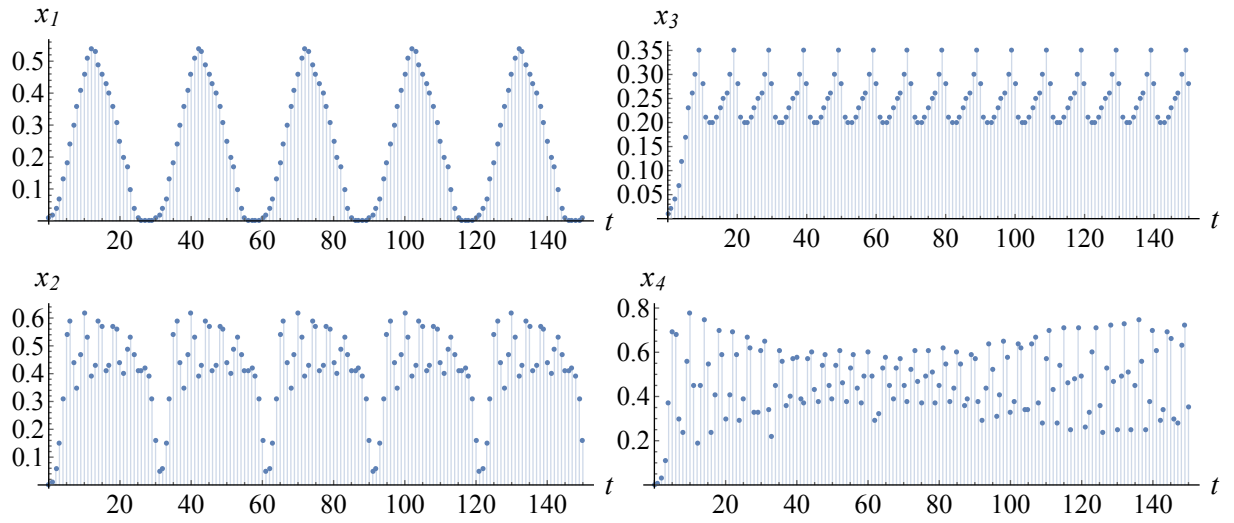


Figura 16: Atividades numa rede com  $q = 3$ ,  $q' = q'' = 81$ , e  $\tau' = \tau'' = 10$ . Os períodos são  $p_1 = p_2 = 30$ ,  $p_3 = 10$  e  $p_4 = \infty$ . Assim, como a parte 4 não oscila de forma periódica na janela de tempo considerada, diz-se que a rede não se sincroniza.

No próximo capítulo, apresenta-se um modelo formulado em termos de equações de tempo discreto que explica, ao menos qualitativamente, a dinâmica dessa rede.

# Capítulo 5

## Modelo em Equações de Diferenças

Considere que nossa rede neural consista de uma quantidade fixa de neurônios homogeneamente interconectados; isto é, em qualquer região da rede, tem-se, em média, a mesma quantidade de ligações regulares e aleatórias. Com isso, a localização espacial dos neurônios pode ser desprezada. Obviamente, isso é uma aproximação do que foi implementado em AC, mas o estudo desse modelo aproximado pode ajudar na compreensão das dinâmicas observadas.

Assuma que, no instante  $t$ ,  $y(t)$  seja o número de neurônios que se tornaram ativos,  $z(t)$  o número de neurônios ativos que já dispararam uma vez,  $r(t)$  o número de neurônios inibidos, e  $s(t)$  o número de neurônios suscetíveis. Segundo as regras de transição de estados do AC, esses números variam de acordo com:

$$\begin{aligned}y(t+1) &= s(t)[ay(t) + bz(t)] + I(t) \\z(t+1) &= y(t)[cy(t) + dz(t)] \\r(t+1) &= z(t) \\s(t+1) &= r(t) + s(t) + y(t) - y(t+1) - z(t+1)\end{aligned}$$

sendo  $a, b, c, d$  parâmetros positivos e  $I(t)$  o estímulo externo aplicado à rede. Note que  $y(t+1) + z(t+1) + r(t+1) + s(t+1) = y(t) + z(t) + r(t) + s(t) = n$ , sendo  $n$  a constante que expressa o número total de neurônios que compõem a rede. A porcentagem de neurônios ativos, em cada instante, vale  $x(t) \equiv [y(t) + z(t)]/n$ .

A primeira equação mostra que neurônios suscetíveis em  $t$  em contato com neurônios ativos tornam-se ativos em  $t+1$ . Neurônios suscetíveis também podem ser ativados mediante um estímulo externo  $I$ . A segunda equação indica que neurônios que se tornaram ativos em  $t$  podem disparar novamente em  $t+1$  se estiverem em contato com outros neurônios ativos. Em  $t+1$ , todos os neurônios que dispararam em  $t-1$  e em  $t$  são

inibidos a disparar novamente, com expressa a terceira equação. De acordo com a quarta equação, tornam-se suscetíveis em  $t + 1$  os neurônios inibidos em  $t$ , mais os suscetíveis em  $t$  que não estão em contato com ativos nem recebem estímulo externo, mais os que dispararam uma única vez e que não estão em contato com ativos.

Não é trivial estudar analiticamente esse sistema de equações de diferenças não lineares. Por isso, realizaram-se simulações numéricas, a fim de tentar compreender sua dinâmica. Nas figuras 19, 20 e 21,  $y(0) = 2$ ,  $z(0) = r(0) = 0$  e  $s(0) = 398$ ; ou seja, a rede é formada por 400 neurônios que são, inicialmente, suscetíveis, exceto dois que se encontram ativos, graças ao estímulo externo. Essa escolha corresponde ao caso em que há duas vias acopladas, cada via formada por duas partes. Então, como cada parte possui 100 neurônios, tem-se 400 neurônios no total. Assuma que cada via receba um estímulo unitário com periodicidade  $P = 10$ . Assim, no modelo escrito em termos de equações de diferenças, a cada  $P = 10$  passos de tempo,  $I = 2$ ; nos demais instantes,  $I = 0$ .

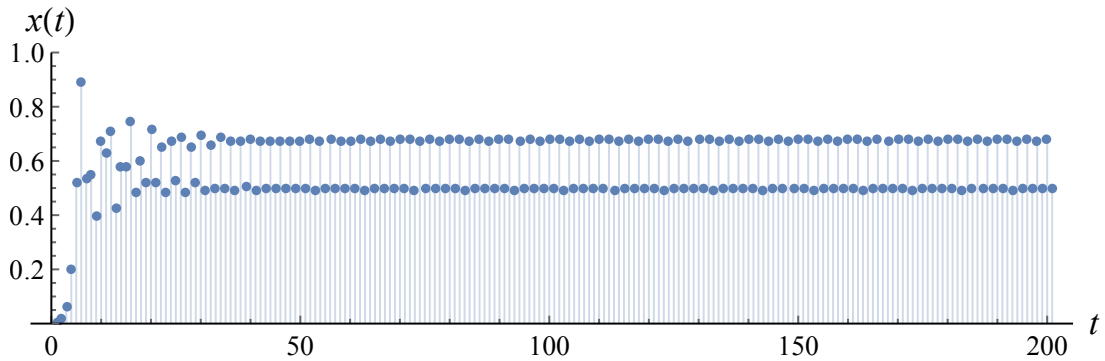


Figura 17: Evolução temporal de  $x(t)$  do modelo analítico para  $a = 0,008$ ,  $b = 0,005$  e  $c = d = 0,001$ .

Na figura 16, em que  $a = 0,008$ ,  $b = 0,005$  e  $c = d = 0,001$ , a fração de neurônios ativos  $x(t)$  oscila, em regime permanente, de forma regular com período 10, que é o mesmo do estímulo recebido.

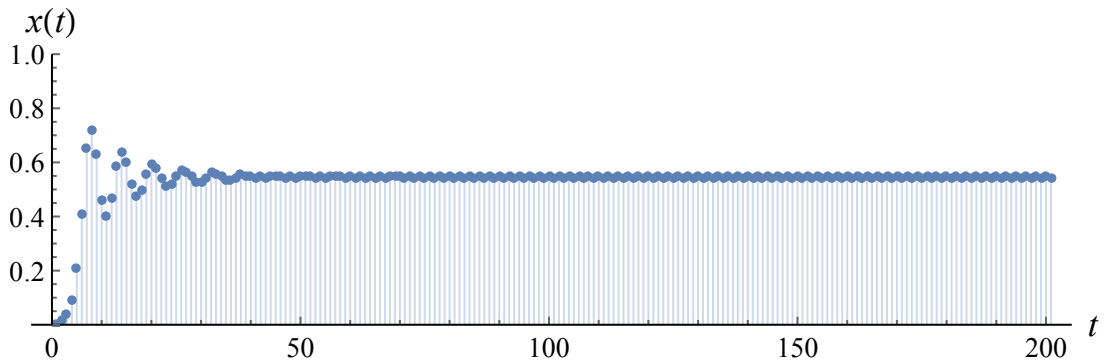


Figura 18: Evolução temporal de  $x(t)$  do modelo analítico para  $a = b = 0,006$ ,  $c = 0,001$  e  $d = 0,004$ .



Na figura 17, com  $a = b = 0,006$ ,  $c = 0,001$  e  $d = 0,004$ ,  $x(t)$  também tende a variar de forma oscilatória com período igual ao da entrada; entretanto, a amplitude da oscilação é tão pequena que parece uma solução estacionária.

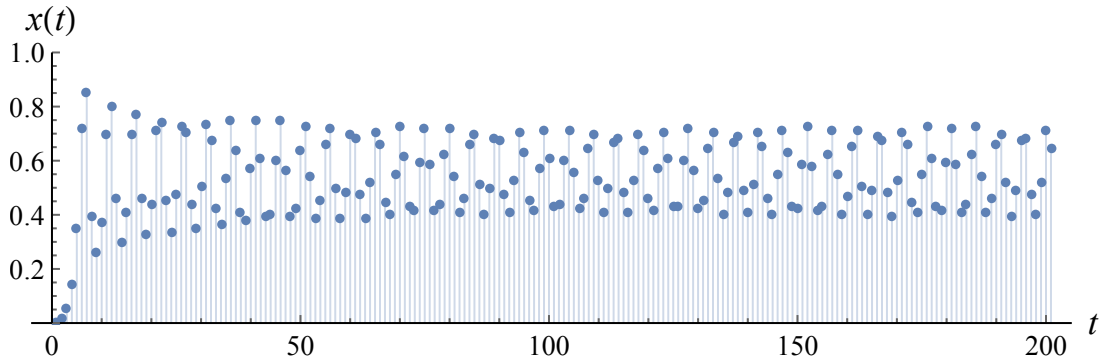


Figura 19: Evolução temporal de  $x(t)$  do modelo analítico para  $a = 0,007$ ,  $b = 0,005$ ,  $c = 0,002$  e  $d = 0,001$ .

Na figura 18, com  $a = 0,007$ ,  $b = 0,005$ ,  $c = 0,002$  e  $d = 0,001$ ,  $x(t)$  oscila de modo irregular.

Esses mesmos comportamentos dinâmicos foram observados no modelo em AC, como pode ser visto nas figuras 10, 11 e 12, em que há oscilações periódicas com mesmo período da entrada com “grande” amplitude (figura 10), com “pequena” amplitude (figura 11) e comportamento irregular, não sincronizado (figura 12).

Esse modelo em equações de diferenças só é válido no caso em que as ligações entre os neurônios são bidirecionais, pois isso homogeneiniza as partes que compõem as vias. No caso em que há ligações unidirecionais entre partes, tem-se uma estrutura de acoplamento do tipo mestre-escravo e, então, seria necessário escrever um conjunto de equações para a parte-mestra e outro conjunto para a parte-escrava. Para via única, o modelo teria 8 equações; para via dupla, 16.

# Capítulo 6

## Conclusões

Neste trabalho, foi realizada uma investigação numérica e analítica da dinâmica de um modelo simplista de rede neural correspondente ao sistema visual de mamíferos. Tal modelo é baseado em grafos aleatórios e autômatos celulares deterministas. A rede é sujeita a estímulos periódicos que correspondem aos impulsos vindos da retina, e é formada por quatro partes. Cada via visual é composta de duas partes, que correspondem ao núcleo geniculado lateral e ao córtex visual de um hemisfério do cérebro. As vias se acoplam mediante o corpo caloso, que conecta os córtices. O objetivo era investigar como a topologia da rede afeta a quantidade de casos em que  $p_1 = p_3 = P$  e  $p_2 = p_4 = \alpha P$ , com  $\alpha$  tipicamente igual a 1, 2 ou 3 (Castelo-Branco et al., 1998a; Gollisch, 2009; Ito et al., 2010). Aqui,  $P = 10$  equivale a um estímulo de 100 Hz,  $p_1$  e  $p_3$  são os períodos de oscilação dos núcleos geniculados e  $p_2$  e  $p_4$  os períodos dos córtices. Todas as conexões são excitatórias. Inibição é levada em conta no número de disparos consecutivos  $\delta$  que um neurônio suficientemente excitado pode realizar antes de ser inibido. Martins (2011), em sua dissertação de mestrado, simulou a dinâmica de uma única via e mostrou que, quanto maior  $\delta$ , menores são as ocorrências de sincronismo. Aqui, tomou-se  $\delta = 2$ .

Em síntese, nossas simulações numéricas mostraram que:

1. ligações direcionadas do núcleo geniculado para o córtex (isto é,  $f' = 1$ ) permitem que essas partes se sincronizem em períodos diferentes, no modelo de via única;
2. ligações não direcionadas entre os córtices (isto é,  $f = bi$ ) e estímulo simultâneo em todos os neurônios que servem de entrada favorecem o sincronismo entre os hemisférios;

3. considerando as tabelas 10-21, os maiores valores de  $N_2$  se deram para  $(q, q') = (9, 9), (27, 27)$ , que são valores intermediários em relação àqueles aqui considerados. Isso sugere que há um número ótimo de ligações aleatórias intrapartes e entre as partes de uma via que maximiza a ocorrência de sincronismo nas proporções citadas;
4. de acordo as tabelas 10-21, os maiores valores de  $N_1$  em via dupla ocorreram para  $(q, q') = (9, 81), (27, 81), (81, 3)$ ;
5. para  $f = bi$  e estímulo simultâneo em toda a primeira linha da cada via,  $q''$  não parece afetar sensivelmente  $N_1$ .

Há muito ainda o que investigar, tomando esse modelo como base. Por exemplo:

1. Qual a relação entre os valores dos parâmetros  $q$ ,  $q'$  e  $q''$  que favorecem o sincronismo e a estrutura da rede neural real (biológica) responsável pela visão em mamíferos?
2. Como simular um estímulo que varia no espaço? Pensamos que isso pudesse ser feito estimulando, por exemplo, o neurônio 1 no instante 1, o neurônio 2 no instante 2, o neurônio 3 no instante 3, e assim por diante (com esses neurônios localizados na primeira linha das partes que correspondem aos núcleos geniculados). Aplicando esse estímulo a 1000 redes criadas com  $q = q' = q'' = 27$  e  $f = bi$ , obteve-se  $N_1 = 529$ ,  $N_2 = 230$  e  $NS = 2$ ; que são números próximos (proporcionalmente falando) daqueles encontrados na tabela 32 do apêndice (que são  $N_1 = 5620$ ,  $N_2 = 2790$  e  $NS = 44$ , em 10000 simulações), para estímulo aplicado sempre ao mesmo par de neurônios ao longo das simulações. Assim, não houve diferença significativa entre os resultados decorrentes desses estímulos dinamicamente distintos. O problema de como simular um estímulo variante no espaço permanece.
3. No sistema visual real de mamíferos, há ligações que partem do córtex para o núcleo geniculado (Bear et al., 2006; Brodal, 2010; Usrey, 2002). No nosso modelo em via única, essas ligações impossibilitaram a ocorrência dos casos com  $N_2 \neq 0$ . Será que esse mesmo comportamento também ocorre em via dupla? Investigações preliminares apontam que sim. Considere  $q = q' = q'' = 27$ ,  $f = bi$  e estímulo simultâneo em todos os neurônios da primeira linha das partes 1 e 3. Admita que  $f' = 2/3$  (assim,  $2/3$  das conexões vão do núcleo geniculado para o córtex e  $1/3$  se dá no sentido contrário). Com essa configuração, obteve-se

$N_1 = 11$ ,  $N_2 = 0$  e  $NS = 123$  em 1000 redes diferentes. O que falta no modelo para que se tenha  $N_2 \neq 0$  com  $f' < 1$ ?

4. Os neurônios no núcleo geniculado e no córtex visual estão organizados em camadas. Será que essa organização espacial é crítica no que diz respeito ao sincronismo entre essas estruturas?
5. Um fato óbvio que não foi aqui considerado: o córtex visual é muito maior do que o núcleo geniculado. Como nosso modelo se comporta quando as partes têm dimensões diferentes?
6. Como o sincronismo é afetado se as partes 1 e 3 recebem estímulos em seus neurônios mais internos, e não apenas naqueles que formam a borda superior dessas partes?
7. Em que medida a diversidade de neurônios encontrada na via visual é crucial para a ocorrência de sincronismo?
8. Como identificar os valores dos parâmetros do modelo escrito em termos de equações de diferenças, de modo que ele reproduza a evolução temporal da atividade da rede neural correspondente? Trabalhos similares foram realizados em modelos sobre epidemiologia (Monteiro, 2014).

Enfim, o modelo ainda carece de muitas investigações, mas ele parece ser um bom ponto de partida para investigações computacionais sobre sincronismo em redes neurais.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aboitiz, F. (2003). Long distance communication in the human brain: Timing constraints for inter-hemispheric synchrony and the origin of brain lateralization. *Biological Research*, 36, 89–99.
- Bear, M. F., Connors, B. W., & Paradiso, M. A. (2006). *Neuroscience: Exploring the Brain*. Baltimore: Lippincott Williams & Wilkins, 4a edição.
- Bloom, J. S. & Hynd, G. W. (2005). The role of the corpus callosum in interhemispheric transfer of information: excitation or inhibition? *Neuropsychology Review*, 15, 59–71.
- Brodal, P. (2010). *The Central Nervous System: Structure and Function*. New York: Oxford University Press, 4a edição.
- Castelo-Branco, M., Neuenschwander, S., & Singer, W. (1998a). Synchronization of visual responses between the cortex, lateral geniculate nucleus, and retina in the anesthetized cat. *Journal of Neuroscience*, 16, 6395–6410.
- Castelo-Branco, M., Neuenschwander, S., Singer, W., & Baron, J. (1998b). Feed-forward synchronization: propagation of temporal patterns along the retinorecortical pathway. *Journal of Neuroscience*, 16, 6395–6410.
- Corballis, P. M. (2003). Visuospatial processing and the right-hemisphere interpreter. *Brain and Cognition*, 53, 171–176.
- Corballis, P. M., Funnel, M. G., & Gazzaniga, M. S. (2002). Hemispheric asymmetries for simple visual judgments in the split brain. *Neuropsychologia*, 40, 401–410.
- Engel, A. K., König, P., Kreiter, A., & Singer, W. (1991). Interhemispheric synchronization of oscillatory neuronal responses in cat visual cortex. *Science Reports*, 252, 1177–1179.
- Gollisch, T. (2009). Throwing a glance at the neural code: rapid information transmission in the visual system. *Human Frontier Science Program*, 3, 36–46.
- He, Y., Chen, Z. J., & Evans, A. C. (2007). Small-world anatomical networks in the human brain revealed by cortical thickness from mri. *Cerebral Cortex*, 17, 2407–2419.
- Ito, H., Maldonado, P., & Gray, C. (2010). Dynamics of stimulus-evoked spike timing correlations in the cat lateral geniculate nucleus. *Journal of Neurophysiology*, 104, 3276–3292.
- Jea, A. et al. (2008). Corpus callosotomy in children and the disconnection syndromes: a review. *Child's Nervous System*, 24, 685–692.

- Kari, J. (2013). Cellular automata lecture notes. “<http://users.utu.fi/jkari/ca>”. [Online, último acesso em 01 de dezembro de 2015].
- Martins, A. & Monteiro, L. H. A. (2013). Frequency transitions in synchronized neural networks. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 18, 1786–1791.
- Mayer, B. L. & Monteiro, L. H. A. (2015). Sincronismo entre redes neurais complexas: Um modelo de sistema visual de mamíferos. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*. [A ser publicado].
- Monteiro, L. H. A. (2014). *Sistemas Dinâmicos Complexos*. São Paulo: Livraria da Física, 2a edição.
- Newman, M. & Watts, D. (1999). Renormalization group analysis of the small-world network model. *Physics letters A*, 263, 341–346.
- Payne, B. R. (1994). Neuronal interactions in cat visual cortex mediated by the corpus callosum. *Behavioural Brain Research*, 64, 55–64.
- Pietrasanta, M., Restani, L., & Caleo, M. (2012). The corpus callosum and the visual cortex: Plasticity is a game for two. *Neural Plasticity*, 2012, 1–10.
- Scannell, J. W., Burns, G. A., Hilgetag, C. C., O’Neil, M. A., & Young, M. P. (1999). The connectional organization of the cortico-thalamic system of the cat. *Cerebral Cortex*, 9, 277–299.
- Schmidt, K. E. (2013). The visual callosal connection: A connection like any other? *Neural Plasticity*, 5, 1–11.
- Sporns, O. (2011). The non-random brain: efficiency, economy, and complex dynamics. *Frontiers in Computational Neuroscience*, 5, 1–13.
- Sporns, O. & Zwi, J. D. (2004). The small world of the cerebral cortex. *Neuroinformatics*, 4, 145–162.
- Squire, L. et al. (2008). *Fundamental Neuroscience*. California: Academic Press, 3a edição.
- Uhlhaas, W. (2006). Neural synchrony in brain disorders: relevance for cognitive dysfunctions and pathophysiology. *Neuron*, 52, 155–168.
- Usrey, W. M. (2002). Spike timing and visual processing in the retinogeniculocortical pathway. *Philosophical Transactions of The Royal Society*, 357, 1729–1737.

Usrey, W. M. & Reid, R. C. (1999). Synchronous activity in the visual system. *Annual Reviews*, 61, 435–456.

Volk, D. (2000). Spiking behavior and epileptiform oscillations in a discrete model of cortical neural networks. *Theory in Biosciences*, 120, 33–44.

Watts, D. J. & Strogatz, S. H. (1998). Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature*, 393, 440–442.

Wolfram, S. (2002). *A New Kind of Science*. Champaign: Wolfram Media, 1a edição.

Yu, S., Huang, D., Singer, W., & Nikolic, D. (2008). A small world of neuronal synchrony. *Cerebral Cortex*, 18, 2891–2901.

# Capítulo 7

## Apêndice

Esse apêndice apresenta tabelas com os resultados de simulações com duas vias.

Seja um estímulo de período 10 aplicado a pares de neurônios, sendo um na primeira linha da parte-1 e outro na primeira linha da parte-3. Os resultados estão relatados nas tabelas 22-33.

Tabela 22: Resultados do grupo 2 para  $q = 3$  e  $f = 1$ .

$q'$	3	3	3	3	9	9	9	9	27	27	27	27	81	81	81	81
$q''$	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81
$N_1$	53	25	127	53	31	60	81	17	114	148	46	0	45	114	55	0
$N_2$	4	3	0	0	25	19	52	1	17	7	2	0	0	0	3	0
$NS$	660	967	1407	1443	387	724	1213	1717	667	1070	1820	1883	1074	1726	2347	2377

Tabela 23: Resultados do grupo 2 para  $q = 9$  e  $f = 1$ .

$q'$	3	3	3	3	9	9	9	9	27	27	27	27	81	81	81	81
$q''$	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81
$N_1$	1187	877	1166	1425	523	744	921	570	1375	1338	1355	12	1719	1406	707	10
$N_2$	24	92	75	11	467	490	436	105	283	322	258	124	15	10	15	0
$NS$	124	181	447	500	322	533	721	1606	574	899	1486	2372	904	1418	2113	2257

Tabela 24: Resultados do grupo 2 para  $q = 27$  e  $f = 1$ .

$q'$	3	3	3	3	9	9	9	9	27	27	27	27	81	81	81	81
$q''$	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81
$N_1$	5682	4486	5343	8151	4354	3900	4745	6524	4507	4467	3867	1538	8127	8279	6154	159
$N_2$	102	209	93	117	1530	1278	1346	719	3040	2878	3446	1890	149	103	91	91
$NS$	5	7	15	20	15	36	80	306	83	105	439	1279	122	192	1085	1062



Tabela 25: Resultados do grupo 2 para  $q = 81$  e  $f = 1$ .

$q'$	3	3	3	3	9	9	9	9	27	27	27	27	81	81	81	81
$q''$	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81
$N_1$	7075	6099	6435	8828	7389	6142	6406	8319	5776	5580	5974	6481	6994	6973	6852	2797
$N_2$	29	10	60	30	291	250	241	271	1856	1623	1586	1585	2087	2328	2295	2248
$NS$	0	0	0	0	0	0	1	2	1	0	4	49	3	6	110	510

Tabela 26: Resultados do grupo 2 para  $q = 3$  e  $f = 1/3$ .

$q'$	3	3	3	3	9	9	9	9	27	27	27	27	81	81	81	81
$q''$	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81
$N_1$	45	103	17	0	36	73	33	0	99	70	19	0	117	53	2	0
$N_2$	6	36	1	0	61	16	11	0	0	1	8	0	3	17	6	0
$NS$	3266	3263	1990	0	2250	2585	1309	1	2018	2642	1577	1	2601	3033	2328	4

Tabela 27: Resultados do grupo 2 para  $q = 9$  e  $f = 1/3$ .

$q'$	3	3	3	3	9	9	9	9	27	27	27	27	81	81	81	81
$q''$	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81
$N_1$	832	457	448	0	694	958	336	0	1444	1502	311	0	1347	1129	211	1
$N_2$	395	404	74	0	526	276	71	0	43	47	159	0	33	107	239	0
$NS$	1331	2173	1781	3	1699	2107	1640	0	1487	2519	1858	1	2516	3754	2738	3

Tabela 28: Resultados do grupo 2 para  $q = 27$  e  $f = 1/3$ .

$q'$	3	3	3	3	9	9	9	9	27	27	27	27	81	81	81	81
$q''$	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81
$N_1$	4979	2818	2068	2	4199	4301	2449	18	5588	5993	1898	10	8366	7744	1411	20
$N_2$	2611	3242	185	0	3410	1586	398	0	1642	418	569	1	43	175	928	3
$NS$	184	554	1236	0	282	675	1072	0	321	682	1175	0	350	588	1519	3

Tabela 29: Resultados do grupo 2 para  $q = 81$  e  $f = 1/3$ .

$q'$	3	3	3	3	9	9	9	9	27	27	27	27	81	81	81	81
$q''$	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81
$N_1$	5533	5062	1746	22	6721	7281	2141	66	6915	7646	1489	85	8711	8157	1486	90
$N_2$	3525	1878	357	1	2158	654	564	8	1313	590	977	13	503	288	906	21
$NS$	8	179	1122	0	6	106	876	0	24	178	470	1	65	128	893	0

Tabela 30: Resultados do grupo 2 para  $q = 3$  e  $f = bi$ .

$q$	3	3	3	3	9	9	9	9	27	27	27	27	81	81	81	81
$q'$	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81
$N_1$	64	89	92	45	39	55	50	51	102	171	122	73	68	112	50	23
$N_2$	1	31	23	19	43	35	68	65	0	0	1	0	6	0	7	12
$NS$	564	915	434	478	385	251	320	316	306	414	440	447	1009	1095	1263	1521

Tabela 31: Resultados do grupo 2 para  $q = 9$  e  $f = bi$ .

$q'$	3	3	3	3	9	9	9	9	27	27	27	27	81	81	81	81
$q''$	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81
$N_1$	1582	1697	1331	1049	817	835	932	833	1534	1691	1716	1665	1391	1581	1489	1165
$N_2$	79	151	299	581	870	833	1106	1047	46	58	29	14	18	42	27	11
$NS$	64	86	102	93	211	166	221	218	373	431	425	362	726	980	1267	1704

Tabela 32: Resultados do grupo 2 para  $q = 27$  e  $f = bi$ .

$q'$	3	3	3	3	9	9	9	9	27	27	27	27	81	81	81	81
$q''$	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81
$N_1$	8404	8394	8213	7559	5687	5779	5370	4925	5817	5960	5620	6409	8290	8735	8608	8827
$N_2$	319	395	521	744	2648	2846	2977	3525	2758	2742	2790	1789	8	12	2	7
$NS$	3	0	4	1	10	8	13	27	22	39	44	9	7	50	42	91

Tabela 33: Resultados do grupo 2 quando  $q = 81$  e  $f = bi$ .

$q'$	3	3	3	3	9	9	9	9	27	27	27	27	81	81	81	81
$q''$	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81
$N_1$	9929	9920	9937	9960	9502	9319	9304	9257	7291	7127	6906	6615	8732	8378	8772	8920
$N_2$	71	80	63	40	498	681	696	743	2701	2870	3083	3360	1229	1523	1144	946
$NS$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

A seguir, as tabelas 34-45 com os resultados decorrentes de estímulo aplicado simultaneamente a dez neurônios de cada via.

Tabela 34: Resultados do grupo 2 para  $q = 3$  e  $f = 1$ .

$q'$	3	3	3	3	9	9	9	9	27	27	27	27	81	81	81	81
$q''$	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81
$N_1$	8779	6377	8574	9162	5458	5880	7245	5300	8441	8459	7827	116	9550	9403	7179	124
$N_2$	25	43	27	11	1319	1212	1282	397	976	988	913	229	0	3	1	0
$NS$	0	2	2	86	45	100	183	1271	18	12	121	2182	0	13	818	1454

Tabela 35: Resultados do grupo 2 para  $q = 9$  e  $f = 1$ .

$q'$	3	3	3	3	9	9	9	9	27	27	27	27	81	81	81	81
$q''$	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81
$N_1$	8490	5619	8221	9781	5266	5309	7019	6646	7435	7391	6992	456	9967	9892	7716	228
$N_2$	47	52	45	28	1607	1469	1483	576	2175	2202	2203	745	17	11	10	4
$NS$	0	3	7	51	35	67	123	835	22	33	135	1801	1	3	761	1140

Tabela 36: Resultados do grupo 2 para  $q = 27$  e  $f = 1$ .

$q'$	3	3	3	3	9	9	9	9	27	27	27	27	81	81	81	81
$q''$	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81
$N_1$	6948	5299	7177	9737	5891	5311	6857	8339	4575	4681	5030	3050	9217	9216	7715	502
$N_2$	69	67	50	53	1059	893	949	615	3568	3223	3930	2544	697	666	717	460
$NS$	0	1	0	14	2	3	26	234	8	14	73	1037	3	6	545	1091

Tabela 37: Resultados do grupo 2 para  $q = 81$  e  $f = 1$ .

$q'$	3	3	3	3	9	9	9	9	27	27	27	27	81	81	81	81
$q''$	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81
$N_1$	7392	6305	7189	9090	7826	6637	6946	8867	6766	5881	6204	7492	6054	6111	6044	3244
$N_2$	14	16	10	15	139	138	150	143	1166	1155	1149	1175	2621	2775	2936	3052
$NS$	0	0	0	1	0	0	0	10	0	0	7	42	0	0	51	220

Tabela 38: Resultados do grupo 2 para  $q = 3$  e  $f = 1/3$ .

$q'$	3	3	3	3	9	9	9	9	27	27	27	27	81	81	81	81
$q''$	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81
$N_1$	6938	2782	1565	0	4898	4997	1967	0	9240	8281	2445	0	9453	8827	2735	21
$N_2$	1021	2509	332	0	2719	1370	486	1	118	271	606	0	16	117	660	4
$NS$	470	1739	1354	2	682	1087	900	1	97	261	897	2	28	290	1690	4

Tabela 39: Resultados do grupo 2 para  $q = 9$  e  $f = 1/3$ .

$q'$	3	3	3	3	9	9	9	9	27	27	27	27	81	81	81	81
$q''$	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81
$N_1$	6729	2819	1792	0	4912	4800	2243	0	9066	8320	2389	1	9918	9347	3467	47
$N_2$	1553	3245	344	1	3314	1910	415	2	541	387	645	0	18	140	712	6
$NS$	303	1268	1295	0	422	820	852	0	90	297	848	0	17	170	1354	1

Tabela 40: Resultados do grupo 2 para  $q = 27$  e  $f = 1/3$ .

$q'$	3	3	3	3	9	9	9	9	27	27	27	27	81	81	81	81
$q''$	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81
$N_1$	5711	2922	2090	2	5269	4699	2545	3	5922	6944	2014	2	9840	9111	2638	41
$N_2$	2424	3981	277	0	3449	2001	373	1	2700	692	626	0	45	188	797	10
$NS$	132	591	1096	0	154	492	773	0	131	527	869	0	38	139	1237	0

Tabela 41: Resultados do grupo 2 para  $q = 81$  e  $f = 1/3$ .

$q'$	3	3	3	3	9	9	9	9	27	27	27	27	81	81	81	81
$q''$	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81
$N_1$	6063	4689	1629	24	7082	6978	1888	36	6925	7963	1558	95	7951	8042	2207	234
$N_2$	3074	1945	264	6	2060	625	406	9	1464	674	827	10	936	568	1101	29
$NS$	14	340	1178	1	13	203	772	0	41	206	633	0	43	167	741	0

Tabela 42: Resultados do grupo 2 para  $q = 3$  e  $f = bi$ .

$q'$	3	3	3	3	9	9	9	9	27	27	27	27	81	81	81	81
$q''$	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81
$N_1$	9431	9372	8966	7155	6161	5192	4353	4009	9427	9409	9434	9465	9580	9534	9566	9534
$N_2$	75	124	362	1517	2275	2872	4140	5151	136	126	111	44	3	3	6	2
$NS$	0	1	0	0	35	31	12	5	2	0	1	0	0	0	0	5

Tabela 43: Resultados do grupo 2 para  $q = 9$  e  $f = bi$ .

$q'$	3	3	3	3	9	9	9	9	27	27	27	27	81	81	81	81
$q''$	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81
$N_1$	9814	9731	9407	8525	6404	5955	5295	4693	9089	9159	9189	9381	9996	9997	9997	9999
$N_2$	156	184	398	1108	2802	3214	4074	5084	872	799	750	546	1	2	1	0
$NS$	0	0	0	0	3	5	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0

Tabela 44: Resultados do grupo 2 para  $q = 27$  e  $f = bi$ .

$q'$	3	3	3	3	9	9	9	9	27	27	27	27	81	81	81	81
$q''$	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81
$N_1$	9810	9800	9756	9688	8047	7913	7775	7610	5860	5881	5864	6127	9943	9940	9961	9985
$N_2$	172	174	216	298	1914	2037	2197	2377	4115	4085	4092	3781	52	54	35	7
$NS$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 45: Resultados do grupo 2 para  $q = 81$  e  $f = bi$ .

$q'$	3	3	3	3	9	9	9	9	27	27	27	27	81	81	81	81
$q''$	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81	3	9	27	81
$N_1$	9971	9975	9970	9970	9671	9689	9678	9691	7808	7790	7795	7823	7676	7653	7752	8119
$N_2$	29	25	30	30	329	311	322	309	2192	2209	2203	2175	2317	2333	2233	1858
NS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0