EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS APLICADAS EM SÉRIES E EM OUTRAS ÁREAS DO CONHECIMENTO

Brian Lee Mayer

ORIENTADOR: Prof. Dr.: Ariovaldo José de Almeida

RESUMO

Este artigo tem como objetivo mostrar a importância das equações de diferenças no tratamento de diferentes tópicos da Matemática, tais como séries de potências e progressões, bem como na abordagem de diversos problemas em Física e em Jogos de estratégia. Em particular apresenta-se aqui um desenvolvimento diferente do que é comumente encontrado no estudo das progressões aritmética e geométrica, nos movimentos uniforme e uniformemente variados, em mudanças de temperatura de corpos. No contexto dos jogos de estratégia apresenta-se uma forma de tratar a Torre de Hanoi utilizando resultados das equações de diferenças. Outra aplicação apresentada é a determinação dos coeficientes da série de potências gerada pela decomposição de uma razão algébrica.

Palavras-chave: Equação de diferenças, séries, sequências.

ABSTRACT

This article aims at showing the importance of difference equations in the treatment of different topics in Mathematics, such as power series and progressions, as well as in the approach to some problems in Physics and Games of Strategy. In particular a different development than the one is commonly found in the study of arithmetic and geometric progressions, uniform and uniformly accelerated movements and changes in body temperature are presented this paper. In the context of games of strategy an approach to the Tower of Hanoi game, using the diference equation‘s results is also presented. Another application presented is the determination of the coefficients of the power series which arrises from the decomposition of an algebraic ratio.

Keywords: Difference equations, series, sequences.

INTRODUÇÃO

Séries de potências é um tópico de grande interesse em Matemática, devido ao seu ampla possibilidade de aplicações, entre elas a resolução numérica ou algébrica de equações diferenciais. As equações de diferenças permitem que relações entre determinadas quantidades sejam estabelecidas e estudadas com maior profundidade. No contexto das sequências de números reais, isto é, funções definidas em $\mathbb{N}$ com valores em $\mathbb{R}$, é possível utilizar as equações de diferenças para estudar o comportamento de sequências cuja *lei de formação* pode ser expressa através de equações que relacionam seus termos. A utilização de equações de diferenças vem sendo feita desde o século V a.C. Elas são encontradas, por exemplo, no trabalho de Arquimedes intitulado *A Medida de um Círculo*, encontrado no livro *The Works of Archimedes* de T. L.

Heath, *Dover Publications*, 1897, bem como no livro de *Leonhard Euler* intitulado *Introductio in Analysin Infinitorum*, publicado em 1748, que felizmente em 1988 recebeu uma tradução para o inglês de John D. Blanton. O livro traduzido recebeu o título *Introduction to the Analysis of the Infinite*, e foi editado pela *Springer-Verlag*. Isso mostra a importância histórica das equações de diferenças.

Leonhard Euler e *DeMoivre* são os pioneiros neste assunto, e no trabalho de Euler mencionado acima ele determinou a soma dos inversos dos quadrados dos números naturais, utilizando as equações de diferenças no contexto da decomposição em séries de potências de uma fração algébrica. Desde então esta aplicação e toda a teoria formal das séries de potência vem sendo desenvolvida por vários matemáticos, entre os quais encontramos *Samuel Goldberg*, que estabeleceu os fundamentos das equações de diferenças (GOLDBERG, 1986).

Para facilitar a leitura do texto incluiu-se nesse trabalho um conjunto de conceitos, definições e notações preliminares sobre funções, sequências e séries. As equações de diferenças aparecem nos estudos envolvendo a razão aurea e a lei de formação de sequências vinculadas a problemas oriundos das ciências naturais. Neste trabalho, o estudo de equações de diferenças limitar-se-á uma exposição sobre o que são as equações de diferenças lineares de primeira ordem com coeficientes constantes, isto é, equações do tipo

$$x_{n+1} = ax_n + b \ .$$

Para essas equações obtêm-se a solução, e são apresentadas algumas aplicações, tais como, a Lei do Resfriamento de *Newton*, onde se parte do princípio de que a mudança de temperatura de um corpo é proporcional a diferença entre as temperaturas do corpo e do ambiente, obtêndo-se a equação:

$$\Delta T_i = k(T_i - T_e) \ .$$

Estudam-se ainda os movimentos uniforme e uniformemente variados de um corpo e a modelagem das jogadas da Torre de Hanoi.

A teoria desenvolvida é utilizada ainda para explicar como as progressões aritmética e geométrica podem ser vistas como casos particulares de uma equação de diferenças, assim generalizando os casos e os colocando de forma a facilitar os estudos. Apresenta-se também é mostrada uma técnica, primeiramente estudada por *Euler*, para expressar uma fração algébrica como uma série de potências. Em particular, é possível estabelecer a ligação das equações de diferenças com a resolução do problema, assim, por exemplo:

$$\frac{1+x}{1-x-x^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 5x^3 + 8x^4 + \ldots \ .$$

REFERENCIAL TEÓRICO

Definição de Sequência

A definição de sequência que será usada nesse trabalho é a de Elon Lages Lima: "[...] uma *seqüência de números reais* é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida no conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ dos números naturais e tomando valores no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais." (LIMA, 2012, p. 100). Elon ainda define: "O valor $x(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, será representado por x_n e chamado o *termo de ordem* n, ou n-*ésimo* termo da seqüência." (LIMA, 2012, p. 100), ficando claro que o ponto principal de uma sequência é a ordem de seus termos.

A função x definida acima é denominada geratriz, ou geradora da sequência. Por exemplo, se a função geratriz da sequência é: $x(n) = n^2 + 4n - 3$, o n-*ésimo* termo da sequência é obtido substituindo-se o valor de $n \in \mathbb{N}$ na expressão $n^2 + 4n - 3$. Assim, os cinco primeiros termos da sequência seriam: $(2, 9, 18, 29, 42, \ldots)$.

Definição de Diferença de Primeira Ordem de uma Função

Goldberg (GOLDBERG, 1986) define o operador Δ, utilizado nesse trabalho, da seguinte maneira: "Dada uma função y e uma constante h tal que $x + h$ pertence ao domínio de y. Então Δy, a primeira diferença de y, é a função cujo valor em x, denotada por $\Delta y(x)$ (ou Δy_x), é dado por: $\Delta y(x) = y(x + h) - y(x)$." (GOLDBERG, 1986, p. 14, tradução nossa).

Definição de Equação de Diferenças

Algumas sequências possuem uma certa relação entre seus termos, e para estudarmos esta relação podemos utiliza uma equação de diferenças. Neste artigo será usada a seguinte definição do que chamamos de equação de diferenças: "Uma equação relacionando os valores de uma função y e uma ou mais de suas diferenças $\Delta y, \Delta^2 y, \ldots$ para cada valor de x de algum conjunto de números S (para os quais cada uma dessas funções está definida) é chamada uma equação de diferenças no conjunto S." (GOLDBERG, 1986, p. 50, tradução nossa)

Deixando claro que usaremos apenas valores inteiros e positivos para o conjunto S, Samuel escreve:

> Para enfatizar a restrição do conjunto S para inteiros consecutivos, nós devemos usar o símbolo k ao invés de x para escrever um número no domínio das funções relacionadas pela equação de diferenças, e escrever y_k ao invés de $y(k)$ para o valor de y em k. *Todos os operadores de diferenças são tomados com um intervalo de diferença igual a* 1 por temos valores consecutivos de k. (GOLDBERG, 1986, p.52, tradução nossa)

E esse intervalo de diferença é a constante h. Portanto uma equação de diferenças é uma equação que relaciona essafunção com suas diferenças, por exemplo, $x_{n+1} = x_n + k$ é uma equação de diferenças, pois pode ser escrita da seguinte forma: $\Delta x_n = k$. De forma geral, uma equação de diferenças é uma equação que pode ser escrita da forma

$$\phi(n, x_n, \Delta x_n, \Delta^2 x_n, \Delta^3 x_n, \ldots, \Delta^k x_n) = 0 \ , \ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

A Sequencia de Leonhardo Fibonacci

Nascido em 1.175 Leonhardo Fibonacci provavelmente foi o primeiro matemático a descobrir a sequência numérica $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 21, 29, 50, 79, \ldots)$. Tudo isso foi surgindo de um problema sobre criação de coelhos, que ele mesmo formulou enquanto observava os coelhos, o qual se tornou um dos mais discutidos por Leonhardo em seu livro *Liber Abbaci*. (GARBI, 2008)

Um dos mais célebres problemas discutidos por Leonhardo no *Liber Abbaci* foi o seguinte: "Quantos casais de coelhos serão reproduzidos cada mês, começando-se com um único casal, se todo mês cada casal produtivo gera um novo casal que se torna produtivo ao fim do segundo mês?" (GARBI, 2008, p.149)

Então ele supôs que não houvessem mortes durante esse período e numerou cada mês como na sequência $(1, 2, 3, 4, \ldots)$, chamando o número de casais que existiam no início de cada mês de f_n. Assim o número representa a quantidade de casais no início do mês $n+1$, vai ser a adição dos casais já existentes no começo do mês n, contando mais os casais que nasceram no tal mês. Porém esses nascimentos são dos casais já com mais de um mês de idade, ou seja, são dos casais já existentes no começo do mês $n-1$. Dessa forma ele chegou na equação:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

Portanto a sequência de Fibonacci representa a quantidade dos casais de coelhos ao começo de cada mês. Tudo isso descoberto por Leonhardo, porém a sequência $(8, 21, 29, 50, 79, \ldots)$, que também respeita a mesma lei, ocorre naturalmente como quantidade de pétalas de camadas diferentes de flores, como a margarida, a dália ou o girassol, e também em alguns padrões encontrados em seres vivos. (GARBI, 2008)

Em relação à equação mostrada anteriormente, ela pode ser rescrita de outra forma, assim dividindo todos termos por f_{n-1}, temos:

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} = 1 + \frac{f_{n-2}}{f_{n-1}} \tag{1}$$

Se o valor de n for aumentado indefinidamente, a relação

$$\frac{f_n}{f_{n-1}}$$

vai obviamente chegar a algum limite, por exemplo, L, então:

$$\frac{f_{n-2}}{f_{n-1}}$$

chegará ao mesmo valor L, pois é uma subsequência. Então se n se aproximar do infinito a equação (1) se torna:

$$L = 1 + \frac{1}{L}$$

Multiplicando ambos os lados por L, gera: $L^2 = L + 1$, uma equação do segundo grau, e pode ser resolvida utilizando a fórmula de Bhaskhara.

$$L = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Onde a, b e c, são os coeficientes de x^2 e x respectivamente e c é o termo independente de x na equação $ax^2 + bx + c = 0$, neste caso eles estão nesta ordem: $1, -1$ e -1. Determinando a raiz positiva da equação, obtém-se:

$$L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Esse número recebe um nome especial por ser muito frequente na natureza e, por consequência, muito importante na matemática, o número ϕ, ou *Número de Ouro*,

$$\phi = 1,6180339\ldots,$$

que é a relação áurea, muito frequente na natureza, e expressa a beleza entre proporções de segmentos, presentes nos ramos das árvores, no nosso corpo entre outros. (GARBI, 2008)

Também já se sabe que, na sequência de Fibonacci, qualquer divisão de um número da sequência pelo seu anterior, se produzem aproximações cada vez melhores do Número de Ouro, isso acontece quando na sequência original escolhem-se números cada vez maiores, o qual era um objeto de estudo mesmo antigamente quando surgiu a descoberta de sua relação com a sequência de Fibonacci, até os dias atuais, onde se encontram várias aplicações em campos da arte e da ciência. O número $1,6180339\ldots$ é encontrado na pintura de Leonhardo da Vinci, como na natureza, nas folhas encontradas em um ramo de árvore e em até braços espirais logarítmicos de galáxias.

Definição de Somatório

A definição comumente encontrada nos livros de matemática é, como James Stewart (2008, apêndice a34) definiu: "Se $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ forem números reais e m e n, inteiros tal que $m < n$, então: $a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{n-1} + a_n = \sum\limits_{i=m}^{n} a_i$."

Propriedades

Para que certas operações com a notação Sigma tornem-se mais simples o seguinte teorema resume algumas propriedades:

Se c for uma constante qualquer (isto é, não depende de i), então:

(a) Homogeneidade: $\sum\limits_{i=1}^{n} c a_i = c \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$

(b) Aditividade: $\sum\limits_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \pm \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$

(c) Lei do corte: $\sum\limits_{i=1}^{N} a_i = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i + \sum\limits_{i=n+1}^{N} a_i$

Com essa nova notação e as relações estabelecidas, o estudo de séries pode prosseguir e se desenvolver, para depois se resolver uma equação de diferenças. Existem mais propriedades, mas como elas dependem de operações específicas, como integrais, logaritmos, entre outras, não será necessária sua apresentação.

Definição de Série

Segundo Sonnino e Mirshawka (19??), as séries são definidas da seguinte forma: Seja dada uma sequência qualquer $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n)$. Pode-se definir a seguinte:

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n, \end{aligned}$$

onde o termo a_n recebe a denominação de termo geral da série, e S_n chama-se soma n-*ésima* parcial da série. Está claro agora que série significa soma dos termos de uma certa sequência, sendo muito comum indicá-la por:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

O valor histórico das séries é inestimável, e quase todos os grandes matemáticos publicaram tratados, teoremas, e cálculos avançadíssimos sobre as séries mais polêmicas de sua época, elas aparecem frequentemente em diversas situações, até mesmo ao escrever um simples número, por exemplo, $0,3333333\ldots$ que pode ser escrito da forma: $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots$, ou seja cada dígito decimal pode ser representado pela fração: $\frac{3}{10^i}$, onde i é a posição da casa decimal, e como o número é formado pela soma dessas casas decimais, teremos então que $0,\overline{3} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{3}{10^i}$, portanto uma série, isso é apenas uma gota em um mar de possibilidades para o emprego da somatória. As séries podem tomar diversas formas, entre elas: de potências, geométricas, aritméticas, hipergeométricas, harmônicas, logarítmicas etc, e oferecem um desafio cada vez maior, e até mesmo casos muito próximos necessitam de raciocínios totalmente diferentes, sendo assim muito difícil de resolvê-las como um todo e de postular técnicas de resolução generalizadas.

Definição de Equação de Diferenças Linear

Uma equação de diferenças linear é: "Uma equação de diferenças sobre um conjunto S é linear se pode ser escrita na forma $f_0(k)y_{k+n} + f_1(k)y_{k+n-1} + \ldots + f_{n-1}(k)y_{k+1} + f_n(k)y_k = g(k)$, onde $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}, f_n$, e g cada uma são funções de k (mas não de y_k) *definidas para todos valores de* k *no conjunto* S." (GOLDBERG, 1986, p. 53-54, tradução nossa)

Foram abordados exemplos de sequências, por exemplo a de *Fibonacci*, importantes para o estudo que realizaremos, e que já possuíam a notação característica de equações de diferenças, e soluções por recursão, a equação abaixo, (2), onde a e b são constantes e $a \neq 1$, é o caso particular de primeira ordem, ou seja $n = 1$ e de coeficientes constantes, i.e. $f_i(k) = c_i$ para $i = 0, 1, 2, 3, 4\ldots$ das equações do tipo apresentado acima.

$$x_{n+1} = ax_n + b \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{2}$$

Chamada de equação de diferenças linear de 1ª ordem, que representa o caso mais simples que poderíamos considerar, felizmente esta já é capaz de solucionar muitos problemas de matemática que enfrentamos. Trabalhando de forma recursiva, expressam-se alguns termos. O termo em que $n = 0$ é:

$$x_1 = ax_0 + b \tag{3}$$

E o termo de $n = 1$ é:

$$x_2 = ax_1 + b \tag{4}$$

Substituindo (4) em (3), ou seja trabalhando recursivamente, pois os valores dos termos anteriores na equação são usados, tem-se:

$$x_2 = a(ax_0 + b) + b$$

Que se condensa para:

$$x_2 = a^2x_0 + ab + b \tag{5}$$

Continuando com $n = 2$:

$$x_3 = ax_2 + b$$

Utilizando o resultado da equação (5) temos:

$$x_3 = a(a^2x_0 + ab + b) + b$$

Simplificando temos:

$$x_3 = a^3x_0 + a^2b + ab + b$$

Continuando com $n = 3$ temos:

$$x_4 = a^4x_0 + a^3b + a^2b + ab + b$$

Pode-se compactar um pouco a equação, deixando o padrão encontrado mais evidente:

$$x_4 = a^4x_0 + b(a^3 + a^2 + a + 1)$$

Onde percebe-se que o número multiplicando b é a soma das potências de a menores e iguais a n, e que o expoente de a é $n + 1$. Portanto para o caso em que $n = k$, teremos:

$$x_{k+1} = a^kx_0 + b(a^{k-1} + a^{k-2} + \ldots + a^2 + a + 1) \tag{6}$$

Esta soma será feita separadamente. Destacando a soma que ocorre em (6), tem-se:

$$a^{k-1} + a^{k-2} + \ldots + a^2 + a + 1$$

Notamos que os termos formam uma progressão geométrica (P.G.) de razão a, e primeiro termo $a^0 = 1$, e que a expressão acima é a soma dessa P.G. Portanto pode-se usar a formula da soma de P.G. Com a notação de somatória, temos o seguinte:

$$\sum_{i=1}^{k} a^{i-1} = a^{k-1} + a^{k-2} + \ldots + a^2 + a + 1 \tag{7}$$

Com essa notação, a equação (6) torna-se:

$$x_{k+1} = x_0 a^k + b \sum_{i=1}^{k} a^{i-1}$$

Multiplicando toda a equação (7) por a, temos:

$$a \sum_{i=1}^{k} a^{i-1} = a^k + a^{k-1} + a^{k-2} + ... + a^2 + a \tag{8}$$

Agora subtraindo (7) de (8) temos:

$$\begin{aligned} a \sum_{i=1}^{k} a^{i-1} - \sum_{i=1}^{k} a^{i-1} = a^k + a^{k-1} + a^{k-2} + \ldots + a^2 + a \\ - \left(a^{k-1} + a^{k-2} + \ldots + a^2 + a + 1\right) \end{aligned}$$

Onde ocorre o cancelamento dos termos a^k entre parênteses embaixo e na direita, um a um, reduzindo-a para:

$$a \sum_{i=1}^{k} a^{i-1} - \sum_{i=1}^{k} a^{i-1} = a^k - 1$$

Agrupando os termos comuns (somatória), tem-se:

$$(a-1) \sum_{i=1}^{k} a^{i-1} = a^k - 1$$

Como foi definido $a \neq 1$, pode-se dividir por $(a-1)$, para poder determinar o valor da soma, encontra-se:

$$\sum_{i=1}^{k} a^{i-1} = \frac{a^k - 1}{a - 1} \tag{9}$$

Portanto foi encontrado o valor que faltava na equação (7). Voltando à equação (6), a expressão toma a forma a seguir.

$$x_{n+1} = x_0 a^{n+1} + b \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

Onde como já foi dito, $a \neq 1$. A equação (2) pode ser geradora de vários tipos de séries, ao aplicar a relação de recorrência indefinidamente, e dispor os resultados de forma ordenada. Para o caso em que $a = 1$, será melhor explicado em seguida, pois sendo um caso particular, requer estratégias específicas. Somente dando um polimento maior à equação diferença resolvida, chega-se ao seguinte:

$$x_n = a^n \left(x_0 + \frac{b}{a-1} \right) - \frac{b}{a-1} \tag{10}$$

Onde se observa um caráter puramente exponencial na equação diferença. Para o caso em que $a = 1$, obtêm-se a equação de diferenças: $x_{n+1} = x_n + b$, que possui como solução a equação $x_n = x_0 + nb$. Portanto a solução geral de uma equação de diferenças linear de 1ª ordem, para qualquer valor de a é:

$$x_n = \begin{cases} a^n \left(x_0 + \dfrac{b}{a-1} \right) - \dfrac{b}{a-1}, & \text{se } a \neq 1 \\ x_0 + nb, & \text{se } a = 1 \end{cases} \tag{11}$$

Para $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$.

Aplicações de Equações de Diferenças Lineares de 1ª Ordem

Mostraremos a seguir a possibilidade de como se expressam certas quantidades, sejam elas a equação horária de um corpo em movimento durante certo período, a uma velocidade constante, ou com aceleração constante, ou a temperatura de uma xícara de chá quente, que num dia frio vai esfriando lentamente, e de como essas grandezas podem ser descritas com equações de diferenças.

Progressões como Casos Particulares de Equações de Diferenças

Usando a equação de diferenças (2):

$$x_{n+1} = ax_n + b \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{12}$$

Podemos separá-la em dois casos:

(a) O caso em que teremos a diferença entre dois termos consecutivos e quaisquer igual, e que gera uma sequência conhecida como progressão aritmética (P.A.).

(b) O caso em que a razão entre dois termos consecutivos e quaisquer é igual, gerando uma sequência conhecida como progressão geométrica (P.G.).

Progressão Aritmética

Segundo Gelson Iezzi et al, (1981, p. 05) "Chama-se *progressão aritmética* uma seqüência em que, a partir do segundo elemento, a diferença entre cada elemento e seu antecessor é constante.". E define a diferença entre os termos da seguinte forma: "A referida diferença constante é chamada razão da P.A. e é indicada por r." (IEZZI *et al*, 1981, p.05).

Observa-se que ao substituir $a = 1$ na equação acima, se obtém uma série cujos termos obedecem aos de uma progressão aritmética de razão b, isso já é evidencia suficiente para um estudo mais profundo do caso.

Fazendo $a = 1$, e considerando $b \neq 0$, na equação, obtém-se o seguinte:

$$x_{n+1} = x_n + b \tag{13}$$

Que gera a seguinte série conforme o quadro abaixo.

Quadro 1: Valores de x_n em relação a n, no caso $a = 1$ e $b \neq 0$

$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$\ldots$	$n = n$
$x_0 + r$	$x_0 + 2r$	$x_0 + 3r$	$x_0 + 4r$	$x_0 + 5r$	$\ldots$	$x_0 + (n+1)r$

A diferença entre os termos sucessivos é constante e igual a b, que é justamente a propriedade da P.A., em outras palavras, para que uma sequência seja uma progressão aritmética, é suficiente e necessário que as diferenças entre seus termos sucessivos sejam constantes e iguais. Portanto toda P.A. pode ser definida a partir de uma equação de diferenças tomando-se $a = 1$ e escolhendo-se b e x_0. Normalmente a notação é modificada para que se possa perceber melhor as diferenças entre as equações, e utiliza-se a letra r no lugar da b, pois ela remete à palavra razão, que no estudo da P.A., como foi definido anteriormente, é a diferença entre dois termos quaisquer, a partir do segundo e seus consecutivos, que não são mais chamados x_n e sim a_n. Desse modo ela se torna: $a_{n+1} = a_n + r$ e possui o termo geral dado pela última fórmula do quadro 1, i.e.:

$$a_{n+1} = a_0 + (n+1)r \tag{14}$$

Progressão Geométrica

A definição de P.G. é, segundo Gelson Iezzi (1981, p. 14): "Chama-se *progressão geométrica* uma seqüência de elementos não nulos em que, a partir do segundo, o quociente de cada elemento pelo seu antecessor é constante."

Retornando à equação (12), e tomando o caso particular onde $a \neq 1; 0$ e $b = 0$, obtemos a seguinte configuração:

$$a_{n+1} = ax_n$$

Utiliza-se o mesmo recurso do caso da P.A. e obtém-se o quadro:

Quadro 2: Valores de x_n em relação a n, no caso $a \neq 1$ e $b = 0$.

$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$\ldots$	$n = n$
qx_0	q^2x_0	q^3x_0	q^4x_0	q^5x_0	$\ldots$	$q^{(n+1)}x_0$

A última equação desse quadro representa o termo geral da progressão geométrica, a qual é:

$$a_{n+1} = q^{n+1}a_0 \tag{15}$$

Onde se vê uma progressão geométrica de razão a segundo as definições de Iezzi. Unificando os resultados, fica claro que os dois casos podem ser cobertos por uma única e eficiente equação, de onde pode-se criar novas relações e expandir a compreensão de séries geométricas, aritméticas e outras, selando de forma integral um conteúdo que é muitas vezes apresentado de forma fragmentada, dificultando os estudos e até impossibilitando a construção de novas relações matemáticas.

As Equações de Diferenças dos Movimentos Uniforme e Uniformemente Variados

Em Física, o que se denomina de movimento, consiste em especificar de momento a momento, a posição de um ponto no espaço relativo a um sistema de coordenadas (BORN, 1962). Para ilustrar como as equações diferença representam o movimento, considere os dois casos abaixo.

Movimento Uniforme

Pode-se utilizar do seguinte caso simples: considere um ponto viajando numa linha reta, mudando sua posição (x) medida em centímetros, conforme o tempo (t) medido em segundos, sempre da mesma forma, então de imediato se vê que o ponto percorre distancias iguais em intervalos de tempo iguais. Portanto pode-se descrever tal fato pela equação:

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x \tag{16}$$

Onde Δx é a diferença de posição entre dois valores de tempo consecutivos. Para se determinar a posição do ponto sem que seja necessário todos os termos anteriores, pode-se escolher um termo, e escrever todos os seguintes em relação àquele. Isso se chama resolver a equação diferença. Escolhendo o termo x_0, os seguintes termos estão dispostos na tabela abaixo.

Quadro 3: Equações geradas por determinados valores de n.

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	$\ldots$	x_n
x_0	$x_0 + \Delta x$	$x_0 + 2\Delta x$	$x_0 + 3\Delta x$	$x_0 + 4\Delta x$	$\ldots$	$x_0 + n\Delta x$

A última equação da tabela é:

$$x_{n+1} = x_0 + n\Delta x$$

A chamada de solução da relação de recorrência, que foi citada acima. Note que ela expressa x_n em função de n diretamente, desse modo fica possível determinar a posição do ponto sabendo-se o deslocamento entre dois intervalos de tempo. (BORN, 1962).

Movimento Uniformemente Variado

No estudo do movimento de corpos pelo espaço, muitas vezes é suficiente considerar um movimento com mudanças bruscas de velocidade, ao invés de uma mudança contínua durante todo o tempo, que se torna complexa e envolve ideias matemáticas mais avançadas e sofisticadas. No caso das mudanças repentinas, o estudo torna-se mais simples, pois há a possibilidade de se tomar caso a caso os estágios do movimento, e então relacioná-los por equações de diferenças, que por sua vez estão no domínio discreto, e por isso são mais simples de forma geral.

Pode-se considerar o seguinte caso: Se as mudanças de velocidade ocorrem de forma periódica, a cada intervalo de tempo de τ segundos, ou qualquer outra unidade de tempo, e forem de mesma intensidade, o movimento é chamado de movimento uniformemente variado (M.U.V.). A observação é feita durante um período t, então cada intervalo de mudança de velocidade será:

$$\tau = \frac{t}{n}$$

Onde n representa a quantidade de mudanças de velocidade, que ocorrem durante o movimento, ao fazer isso, divide-se todo o percurso do corpo, em partes iguais em intervalo, deixando uma base sólida para um estudo discreto mais aprofundado, governado por equações de diferenças, que relacionarão os estágios, por métodos simples de serem resolvidos. (BORN, 1962)

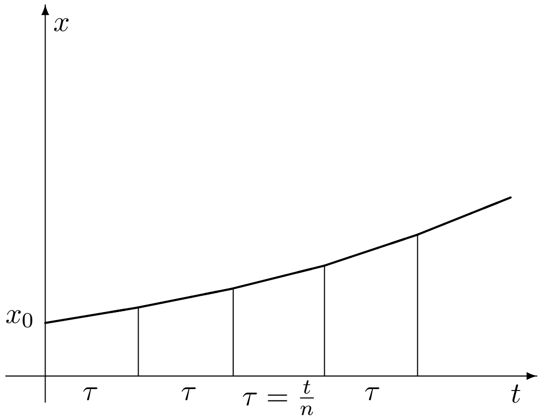

Gráfico 1: Movimento dividido em intervalos
Fonte própria

Para continuar, a mudança de velocidade será representada pela letra w, como o movimento está dividido em partes igualmente espaçadas, e a alteração de velocidade tem sempre a mesma intensidade, a mudança total de velocidade é, se ocorrem n durante o experimento: $n.w$; e chama-se de aceleração a quantidade $\frac{w}{\tau}$, que será indicada por a, ou seja $w = a\frac{t}{n}$. (BORN, 1962)

Então a velocidade do corpo ao passar de um intervalo para o outro se determina se adicionando w à sua velocidade anterior. Se o corpo no momento em que se inicia seu estudo possuía velocidade v_0, então a equação de diferenças que relaciona seu estado com o intervalo ao qual ele pertence é:

$$v_n = v_{n-1} + w$$

Que ao ser resolvida gera:

$$v_n = v_0 + nw$$

E seguindo essas equações o corpo segue seu movimento, de modo que a partir do primeiro intervalo de tempo sua posição x no espaço é $x_1 = x_0 + v_1\frac{t}{n}$, e, a partir do segundo é $x_2 = x_1 + v_2\frac{t}{n} = x_0 + (v_1 + v_2)\frac{t}{n}$, e assim por diante. Desse modo depois do n-ésimo intervalo de tempo o corpo terá chegado à posição:

$$x_n = x_0 + (v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n)\frac{t}{n} \tag{17}$$

Resolvendo separadamente a soma $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n$ que aparece acima se tem:

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n = (v_0 + w) + (v_0 + 2w) + (v_0 + 3w) + \ldots + (v_0 + nw) \tag{18}$$

Pois $v_1 = v_0 + w, v_2 = v_0 + 2w, v_3 = v_0 + 3w$ e assim sucessivamente, usando a equação mostrada. Rescrevendo a equação (18) obtêm-se:

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n = nv_0 + w(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n) \tag{19}$$

Essa última sequência que aparece na equação (19) é famosa por ter sido resolvida por Gauss, aos sete anos de idade, quando descobriu que podia ser facilmente calculada somando-se o 1° com o último termo, o 2° termo com o penúltimo e assim por adiante, até se obter $n/2$ pares, então a soma de cada par é $(n+1)$, portanto ter-se-á $(n+1)n/2$. O que resulta em:

$$nv_0 + w(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n) = nv_0 + w(n+1)\frac{n}{2}$$

Substituindo w por at/n:

$$nv_0 + w(n+1)\frac{n}{2} = nv_0 + \frac{at}{n}(n+1)\frac{n}{2} = nv_0 + \frac{at}{2}(n+1)$$

Substituindo em (17) o resultado obtido finalmente gera a equação discreta do M.U.V.: (BORN, 1962)

$$x_n = x_0 + \left(nv_0 + \frac{at}{2}(n+1)\right)\frac{t}{n} = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right) \tag{20}$$

Por meio de uma análise em que se tomam valores cada vez maiores para n, isto é: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, ou seja, quando os intervalos são tão pequenos que já não se pode perceber as mudanças de velocidade, portanto o movimento se torna suave, obtendo-se o caso contínuo. Observa-se então que a relação mais à direita, $(n+1)/n$, tende a 1, e a equação é rescrita. A equação (20) é transformada na equação contínua do M.U.V., e colocada do jeito que é mais comum de ser encontrada em livros e apostilas, normalmente destinados aos alunos do ensino médio.

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Dessa forma é possível ver que o caso contínuo pode ser demonstrado a partir do caso discreto, e mais ainda, a transição do discreto para o contínuo mostra que aproximamos o segundo por valores maiores, pois a relação $\dfrac{n+1}{n}$ tende a um 1 tomando valores maiores, porém arbitrariamente mais próximos de 1, quando fazemos n tender ao infinito. Entretanto, para valores finitos de n percebemos a discrepância entre os dois casos. Além disso, o caso discreto nos mostra detalhes que são perdidos ao usarmos ideias de infinito, como usualmente acontece no Cálculo.

Modelo de Mudança de Temperatura de Corpos

É possível modelar por equações de diferenças a mudança de temperatura de corpos mantidos em um ambiente com temperatura constante, para isso utilizamos a Lei do resfriamento de *Newton*, embora o nome indique queda de temperatura, essa lei também é valida para aumento, ou seja, aquecimento. Partindo de princípios indutivos, Newton desenvolveu a seguinte fórmula:

$$\Delta T_n = k(T_n - T_e)$$

Nesta equação T_n representa a temperatura do corpo estudado em um certo momento n, e T_e é a temperatura externa, considerada constante, onde se encontra o corpo. Essa equação de diferenças modela a mudança de temperatura de objetos em ambientes mantidos à temperatura constante, como um copo de chocolate quente esfriando na mesa, em um dia frio, ou uma jarra de limonada esquentando num dia quente. A equação diz que a mudança na temperatura do corpo é proporcional à diferença de temperatura entre o ele e o ambiente, ou seja, se as temperaturas do corpo e do ambiente são muito diferentes, implicam em taxas de resfriamento ou aquecimento altas. (SLOUGHTER, 2009)

Dando o tratamento da teoria desenvolvida anteriormente, deve-se primeiro rescrevê-la da seguinte forma:

$$T_{n+1} = (k+1)T_n - kT_e$$

Então usando a fórmula do termo geral encontrada em (10) a solução da equação diferença acima é:

$$T_n = (k+1)^n T_0 - kT_e\left(\frac{(k+1)^n - 1}{k}\right)$$

Que se simplifica para:

$$T_n = (k+1)^n(T_0 - T_e) + T_e$$

Observe que a solução depende apenas do termo geral da sequência, como nos outros casos, o limite quando $n \to \infty$, a temperatura do corpo tende a ambiente, se $-1 < k < 0$. Caso contrário a série diverge e a temperatura do corpo tende ao infinito. Então, o caso convergente possui o limite:

$$\lim_{n\to\infty} T_n = T_e$$

A Torre de Hanoi

A *Torre de Hanoi* é um jogo muito popular onde se têm três hastes, e deve-se desconstruir uma pirâmide constituída por anéis horizontais, usualmente feitos de madeira, e construí-la novamente em outra haste, usando a do meio para as jogadas intermediárias. Neste jogo não é permitido colocar um anel maior em cima de um anel menor, e so é possível mover um de cada vez. O número de discos pode variar, e quanto maior o for, mais complexas serão as jogadas, e uma maior quantidade delas será necessária, mas o número de hastes é sempre o mesmo. Vejamos como a quantidade de jogadas está relacionada com o número de discos.

Sendo n o número de discos movidos e T_n a quantidade de jogadas necessárias para tal, a Figura 2 mostra um jogo com $n+1$ anéis depois de T_n jogadas.

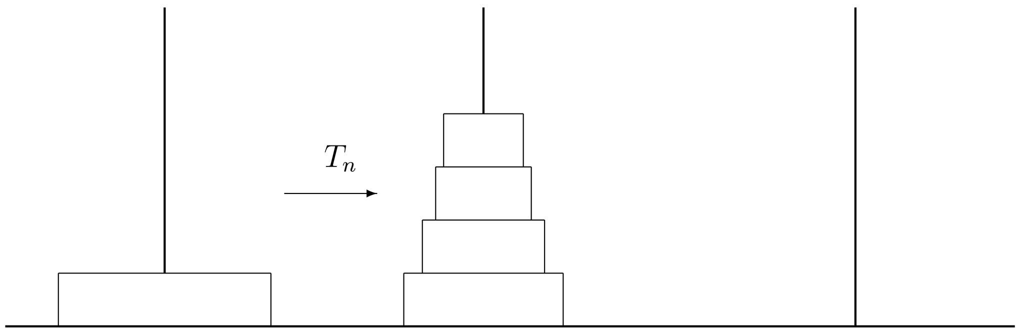

Figura 1: A Torre de Hanoi em um certo estágio.
Fonte própria

Fica claro que com apenas mais uma jogada o maior disco é colocado na terceira haste, e como a pequena pirâmide do meio foi construída com T_n jogadas, para construí-la novamente em cima do disco maior seriam mais T_n jogadas, e assim se constrói uma pirâmide com $n+1$ discos na terceira haste. E para tal feito foi necessário, primeiro, as T_n jogadas para fazer a torre do meio, mais uma jogada para mover o disco $n+1$ na terceira haste e mais T_n jogadas para fazer a torre final, formada por $n+1$ discos. Portanto para a construção de uma pirâmide de $n+1$ discos necessitam-se de $2T_n+1$ jogadas, assim a equação de diferenças é:

$$T_{n+1} = 2T_n + 1 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Que possui solução $T_n = 2^n - 1$.

Desenvolvimento de Frações Algébricas em Séries de Potências

Uma fração algébrica, própria, da forma $\dfrac{A}{ax+b}$ pode ser expressa em uma série infinita de potências, sendo esta série dada pela fórmula do termo geral $a_n x^n$, se supõe que a fração pode ser decomposta de tal forma e obtêm-se:

$$\frac{A}{ax+b} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots$$

Multiplicando ambos lados pelo denominados obtêm-se:

$$A = (ax+b)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots)$$

que pela propriedade distributiva e arranjando os termos em ordem crescente de potência torna-se: $a_0b + (a_1b + aa_0)x + (a_2b + aa_1)x^2 + (a_3b + aa_2)x^3 + (a_4b + aa_3)x^4 + \ldots$, onde o termo de ordem n seria da forma $a_nb + aa_{n-1}$. A igualdade de polinômios implica que $A = a_0b$, e todos os outros termos devem ser iguais a zero. Isso resulta em $a_0 = \dfrac{A}{b}$, e $a_ib + aa_{i-1} = 0$, para todo $i = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ ou seja: $a_i = -\dfrac{a}{b}a_{i-1}$. Uma equação de diferenças cuja resolução é:

$$a_n = (-1)^n \frac{Aa^n}{b^{n+1}} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Assim obtemos $\dfrac{A}{ax+b} = \dfrac{A}{b} - A\dfrac{a}{b^2}x + A\dfrac{a^2}{b^3}x^2 - A\dfrac{a^3}{b^4}x^3 + A\dfrac{a^4}{b^5}x^4 + \ldots$

Para as frações impróprias, a partir da divisão de polinômios chega-se à própria, onde pode ser aplicado esse método. A fração algébrica $\dfrac{\alpha + \beta x}{a + bx + cx^2}$ pode ser expressa em uma série infinita da mesma maneira, portanto:

$$\alpha + \beta x = (a + bx + cx^2)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots)$$

a multiplicação de tais termos resulta em $aa_0 + (aa_1 + ba_0)x + (aa_2 + ba_1 + ca_0)x^2 + (aa_3 + ba_2 + ca_1)x^3 + \ldots$ Onde se obtêm: $a_0 = \dfrac{\alpha}{a}$, $a_1 = \dfrac{\beta}{a} - \dfrac{\alpha b}{a^2}$, e a partir desse termo vale a equação de diferenças: $aa_{i+2} + ba_{i+1} + ca_i = 0$, ou $a_{i+1} = -\dfrac{b}{a}a_{i+1} - \dfrac{c}{a}a_i$, $i = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$

que é uma equação de diferenças de segunda ordem. A solução dessa equação está fora do escopo deste artigo, mas o leitor está convidado a resolvê-la.

O caso particular em que $\alpha = 1, \beta = 2, a = 1, b = c = -1$ gera a fração algébrica

$$\frac{1+2x}{1-x-x^2}$$

que possui a série de potências com os seguintes coeficientes: $a_0 = 1, a_1 = 3$, e a equação de diferenças que determina os outros termos é: $a_{i+2} - a_{i+1} - a_i = 0$, isto é $a_{i+2} = a_{i+1} + a_i,\ i = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$, que é a conhecida relação de recorrência de *Fibonacci*, gerando assim os coeficientes que são a soma dos dois anteriores. Portanto temos:

$$\frac{1+2x}{1-x-x^2} = 1 + 3x + 4x^2 + 7x^3 + 11x^4 + 18x^5 + \ldots$$

E com o método apresentado pode-se utilizar as séries de potências para calcular outras séries de potências, seja para algumas funções, que é feita usualmente através do Cálculo, outras frações algébricas ou somas de séries numéricas. As séries são conhecidas por oferecer em muitos casos um grande obstáculo no prosseguimento dos estudos, sendo que algumas tornam-se tão complicadas que os que conseguem resolvê-las podem entrar para a história, como foi o caso do matemático Suíço Euler, que conseguiu calcular a série:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{i^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

enfrentada por diversos matemáticos, por exemplo, Bernoulli e Laplace, que não conseguiram resolvê-la. Na maioria das vezes é necessário muito tempo de estudo, tentando vários métodos de resolução, mudanças de variáveis, analogias com outros casos, e outras estratégias.

METODOLOGIA

O método de pesquisa deste trabalho procura um aprofundamento na teoria exposta, e para comprovar sua efetividade e veracidade foi feita uma pesquisa bibliográfica, que segundo Antônio Severino (2009) é: "A *pesquisa bibliográfica* é aquela que se realiza a partir do registro disponível, decorrentes de pesquisas anteriores, em documentos impressos, como livros, artigos, teses etc. Utiliza-se de dados ou de categorias teóricas já trabalhadas por outros pesquisadores e devidamente registrados." (SEVERINO, 2009, p. 122), e se dará tendo caráter qualitativo, conforme as definições de Lüdke e André:

> Citações são freqüentemente usadas para subsidiar uma afirmação ou esclarecer um ponto de vista. Todos os dados da realidade são considerados importantes. O pesquisador deve, assim, atentar para o maior número possível de elementos presentes na situação estudada, pois um aspecto supostamente trivial pode ser essencial para a melhor compreensão do problema que está sendo estudado. (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p.12)

É estudada toda a teoria necessária para que o desenvolvimento do assunto seja possível e se dê de uma forma suave e contínua, sempre procurando referências em trabalhos escritos de fontes reconhecidas e atuais.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A pesquisa mostrou que com as equações de diferenças lineares e de 1ª ordem é possível abordar de uma forma mais simples algumas progressões da matemática, como as aritméticas e as geométricas, que foram descritas com as seguintes equações de diferenças, respectivamente:

1. $x_{n+1} = x_0 + (n+1)r$, e
2. $a_{n+1} = q^{n+1}x_0$

Para $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$.

Foram mostradas situações e fenômenos físicos, como os movimentos uniforme e uniformemente variados e a mudança de temperatura de corpos, e a modelagem da Torre de Hanoi, que demonstradas com as equações de diferenças geraram as seguintes equações:

1. A equação horária discreta do movimento uniforme: $x_{n+1} = x_0 + n\Delta x$;
2. A equação horária discreta do movimento uniformemente acelerado: $x_n = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)$;
3. A equação da mudança de temperatura de um corpo: $T_n = (k+1)^n(T_0 - T_e) + T_e$;
4. O modelo da Torre de Hanoi: $T_n = 2^n - 1$,

que foram demonstradas de uma forma intuitiva e fluida.

Também mostramos o papel crucial das equações de diferenças na determinação dos coeficientes das séries de potências, geradas pelo processo de decomposição das frações algébricas. E dessa forma expusemos dois exemplos:

1. $\frac{A}{ax+b} = \frac{A}{b} - A\frac{a}{b^2}x + A\frac{a^2}{b^3}x^2 - A\frac{a^3}{b^4}x^3 + A\frac{a^4}{b^5}x^4 + \ldots$, e
2. $\frac{1+2x}{1-x-x^2} = 1 + 3x + 4x^2 + 7x^3 + 11x^4 + 18x^5 + \ldots$.

Nestas equações podemos obter vários casos diferentes, apenas alterando o valor das constantes, e o método pode ser usado para qualquer grau, pois se o grau do numerador for maior do que o do denominador, a divisão de polinômios a reduzirá, tendo assim uma fração própria. Além disso, essa decomposição pode ser usada com o Cálculo Diferencial e Integral para se obter séries de potências de funções contínuas, que muitas vezes são complicadas de se determinar por meio das séries de *Maclaurin* ou de *Taylor*, facilitando assim os estudos de funções.

Portanto o uso das equações de diferenças permite um estudo mais simplificado e profundo no desenvolvimento das séries de potências, além de possibilitar outros estudos em outras áreas do conhecimento.

CONCLUSÃO

Este artigo fez um levantamento de conteúdos matemáticos acerca das equações de diferenças, num desenvolvimento de conceitos, definições e fórmulas, a partir de documentos de reconhecimento acadêmico, de forma a correlaciona-lo com todo o material apresentado, sempre enfatizando o papel das equações de diferenças no desenvolvimento das aplicações.

Foi mostrada a importância do estudo das equações de diferenças, cumprindo com a proposta de um maior conhecimento sobre as equações e suas aplicações, estabelecendo conexões entre as progressões aritmética e geométrica, equações dos movimentos uniforme e uniformemente variados, o modelo de mudança de temperatura de um corpo, o desenvolvimento de séries de potências de certas frações algébricas e uma aplicação na modelagem da quantidade de jogadas da Torre de Hanoi e que a Modelagem Matemática pode ser um eficiente veículo de transmissão de conceitos de equações de diferenças numa forma atraente e motivadora. Assim contemplando e envolvendo a descrição e análise da metodologia, procurando demonstrar, por meio de uma abordagem mais simples a importância do uso das equações de diferenças.

Este trabalho deixa ainda a proposta de aprofundamento no assunto, para os leitores que desejarem fazer novas aplicações, postular e demonstrar teoremas, e diversas outras utilidades que as equações de diferenças permitem. Num trabalho posterior pode ser feita uma pesquisa por mais possibilidades e desdobramentos do assunto, devido também à imensa quantidade de possíveis empregos de tal, isso permite que o leitor prossiga os estudos e se aprofunde ainda mais no assunto, usando as demonstrações deixadas, a bibliografia deste artigo também é uma boa fonte, pois é rica em aplicações e novos conteúdos. Os leitores que desejarem estudar cálculo através das equações de diferenças podem consultar o livro *Foundations of Differential Calculus*, *Springer*, de Leonhard Euler, que possui uma abordagem surpreendente e original.

REFERÊNCIAS

BORN, Max. *Einstein's Theory of Relativity*. New York: Dover, 1962.

EULER, Leonhard. *Introduction to Analisys of the Infinite. Book I*. New York: Springer-Verlag, 1988

GARBI, Gilberto G. *A Rainha das Ciências*. 5 ed. São Paulo: Livraria da Física. 2009.

GOLDBERG, Samuel. *Introduction to Difference Equations*. New York: Dover Publications, 1986.

IEZZI, Gelson; et al. *Tópicos de Matemática*. 2 ed. São Paulo: Atual, 1981.

LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise vol. 1*. 14 ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2012

LUÍS, Rafael. *Equações de Diferenças e Aplicações*. 2006 Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade da Madeira, Funchal, 2006.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E. D. A. *Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas*. São Paulo: EPU, 1986.

SEVERINO, Antônio Joaquim. *Metodologia do Trabalho Científico*. 23 ed. São Paulo: Cortez, 2009.

SLOUGHTER, Daniel C. *Difference Equations to Differential Equations*. Disponível em: <http://www.synechism.org/wp/difference-equations-to-differential-equations/>. Acesso em 14 mai. 2014.

SONNINO, Sérgio; MIRSHAWKA, Victor. *Séries*. São Paulo: Nobel, 19??.

STEWART, James. *Cálculo, volume I*. 5 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2008.