Equações de Diferenças Aplicadas em Séries e em outras Áreas do Conhecimento

Brian Mayer | Matemática 8º Semestre
Orientador: Prof. Dr. Ariovaldo José de Almeida

Objetivos

- Mostrar a importância do estudo das equações de diferenças;
- Utilizar uma abordagem diferente;
- Descrever fenômenos físicos através da modelagem com equações de diferenças.

Motivações

- É um assunto pouco explorado;
- Simplificação dos cálculos;
- Permitir novas aplicações.

Referencial Teórico

- Definições de sequência, equações de diferenças, séries, notação de somatória forma retirados de livros de matemática tais como *Introduction to Difference Equations (Samuel)*, *Cálculo Vol. 1 (Stewart)*, *Curso de análise (Elon)* e *Séries*.
- Aplicações das equações de diferenças foram pesquisadas nos livros *Difference Equations to Diferential Equations*, *Introduction to the Analysis of Infinite*, *Einstein's Theory of Relativity* e *A Rainha das Ciências*.

Definição de Sequência

Segundo *Elon Lages Lima*:

Definição: "[...] uma *seqüência de números reais* é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida no conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ dos números naturais e tomando valores no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais."

Definição da notação de Somatório

Segundo *James Stewart*:

Definição: "Se $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ forem números reais e m e n, inteiros tal que $m < n$, então:

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{n-1} + a_n = \sum_{i=m}^{n} a_i."$$

Definição de Equações de Diferenças

Segundo *Samuel Goldberg*:

Definição: "Uma equação relacionando os valores de uma função y e uma ou mais de suas diferenças $\Delta y, \Delta^2 y, \ldots$ para cada valor de x de algum conjunto de números S (para os quais cada uma dessas funções está definida) é chamada uma equação de diferenças no conjunto S."

Resolução do caso linear de 1ª ordem com coeficientes constantes

A equação de diferenças linear de 1ª ordem e com coeficientes constantes é da forma:

$$x_{n+1} = ax_n + b$$

E quando resolvida (expressar x_n em função de n diretamente), da a solução:

$$x_n = \begin{cases} a^n \left(x_0 + \dfrac{b}{a-1} \right) - \dfrac{b}{a-1}, & \text{se} \quad a \neq 1 \\ x_0 + nb, & \text{se} \quad a = 1 \end{cases}$$

Aplicações

1. As progressões aritméticas podem ser vistas como um caso particular da equação de diferenças mostrada, onde $r \neq 0$ e $a = 1$. Possuindo solução:

$$a_{n+1} = a_0 + (n+1)r$$

2. As progressões geométricas podem ser vistas como um caso particular da equação de diferenças mostrada, onde $b = 0$ e $q \neq \{1, 0\}$. Que nos dá a solução:

$$a_{n+1} = q^{n+1} a_0$$

Aplicações

3. A equação horária discreta do movimento uniforme: $x_{n+1} = x_0 + n\Delta x$;
4. A equação horária discreta do movimento uniformemente acelerado: $x_n = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)$;
5. A equação da mudança de temperatura de um corpo: $T_n = (k+1)^n(T_0 - T_e) + T_e$;
6. O modelo das jogadas da Torre de Hanoi: $T_n = 2^n - 1$,

Aplicações

7. Desenvolver certas frações algébricas em séries de potências, tais como:
   - $\dfrac{A}{ax+b} = \dfrac{A}{b} - A\dfrac{a}{b^2}x + A\dfrac{a^2}{b^3}x^2 - A\dfrac{a^3}{b^4}x^3 + A\dfrac{a^4}{b^5}x^4 + \ldots$
   - $\dfrac{1+2x}{1-x-x^2} = 1 + 3x + 4x^2 + 7x^3 + 11x^4 + 18x^5 + \ldots$

Metodologia

- O método de pesquisa deste trabalho procura um aprofundamento na teoria exposta, e para comprovar sua efetividade e veracidade foi feita uma pesquisa bibliográfica procurando referências em trabalhos escritos de fontes reconhecidas e atuais.
- Caráter qualitativo.

Considerações Finais

- Com as Equações de Diferenças podemos:
  - Unificar a teoria das progressões aritmética e geométrica;
  - Descrever as equações dos movimentos uniforme e uniformemente variados;
  - Modelar a de mudança de temperatura de um corpo com a lei do resfriamento de *Newton*.
  - Desenvolver certas frações algébricas em séries de potências;
  - Modelar a quantidade de jogadas da Torre de Hanoi.
- Este trabalho deixa ainda a proposta de aprofundamento no assunto.

Referências

- BORN, Max. *Einstein's theory of relativity*. New York: Dover, 1962.
- EULER, Leonhard. *Introduction to Analisys of the Infinite. Book I*. New York: Springer-Verlag, 1988
- GARBI, Gilberto G. *A rainha das ciências*. 5 ed. São Paulo: Livraria da Física. 2009.
- GOLDBERG, Samuel. *Introduction to Difference Equations*. New York: Dover Publications, 1986.
- IEZZI, Gelson; et al. *Tópicos de matemática*. 2 ed. São Paulo: Atual, 1981.
- LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise vol. 1*. 14 ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2012
- LUÍS, Rafael. *Equações de Diferenças e Aplicações*. 2006 Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade da Madeira, Funchal, 2006.
- LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E. D. A. *Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas*. São Paulo: EPU, 1986.
- SEVERINO, Antônio Joaquim. *Metodologia do Trabalho Científico*. 23 ed. São Paulo: Cortez, 2009.
- SLOUGHTER, Daniel C. *Difference Equations to Differential Equations*. Disponível em: <http://www.synechism.org/wp/difference-equations-to-differential-equations/>. Acesso em 14 mai. 2014.
- SONNINO, Sérgio; MIRSHAWKA, Victor. *Séries*. São Paulo: Nobel, 19??.
- STEWART, James. *Cálculo, Volume I*. 5 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2008.

Para maiores informações: 71462287@mackenzista.br
Obrigado.